数理解析研究所講究録 1410 巻 2005 年 85-105

Generalization of Harish-Chandra's basic theorem for non-compact Riemannian symmetric spaces

織田 寛 (Hiroshi ODA) *
拓殖大学・工学部 (Faculty of Engineering, Takushoku University)

1 導入と主結果

本稿で扱う結果は, [Od] で行った複素半単純 Lie 環に対する Harish-Chandra 同型の一般化を非コンパクト型 Riemann 対称空間の場合に拡張したものである. [Od] における予想 3.9 が講演後に一般化された形で解決したので (定理 4.9), 本稿はそれについても触れる.

$\mathfrak{g}$ を非コンパクト型実半単純 Lie 環とし, その Cartan 対合 θ を 1 つ固定する. 一般に本稿では右下の添字 C は実数上定義された数学的対象の複素化を表す. $U(\mathfrak{g}_\mathbf{C})$ を複素 Lie 環 $\mathfrak{g}_\mathbf{C}$ の普遍包絡環, $Z(\mathfrak{g}_\mathbf{C})$ をその中心, $S(\mathfrak{g}_\mathbf{C})$ を $\mathfrak{g}_\mathbf{C}$ の対称代数とする. G_{ad} を $\mathfrak{g}$ の随伴群, G_θ を $\mathfrak{g}$ の自己同型を与えるような $\mathfrak{g}_\mathbf{C}$ の内部自己同型全体が作る群とし (θ は $\mathfrak{g}_\mathbf{C}$ 上複素線型に拡張する), G を $G_{\mathrm{ad}} \subset G \subset G_\theta$ であるような任意の群とする. $G_{\mathrm{ad}}, G, G_\theta$ の随伴作用を Ad, $\mathfrak{g}_\mathbf{C}$ のそれを ad で表す. $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を Cartan 分解とし, $\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ をとり, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ に関する制限ルート系 Σ の基 Π を固定する. Π の定める正ルート全体の集合を Σ^+ と表す. $K = G^\theta$, $M = Z_K(\mathfrak{a})$ (K における $\mathfrak{a}$ の中心化群), $\mathfrak{m} = \mathrm{Lie}(M)$ とする. $N_K(\mathfrak{a})$ (K における $\mathfrak{a}$ の正規化群) により Weyl 群 $W = N_K(\mathfrak{a})/M$ を定義する. 各 $\alpha \in \Sigma$ に対する (実) ルート空間を $\mathfrak{g}_\alpha$ とし, $\mathfrak{n} = \sum_{\alpha\in\Sigma^+} \mathfrak{g}_\alpha$, $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Sigma^+}(\dim \mathfrak{g}_\alpha)\alpha$ とする. $U(\mathfrak{g}_\mathbf{C})$ から $S(\mathfrak{a}_\mathbf{C})$ への写像 γ を, 射影

$$U(\mathfrak{g}_\mathbf{C}) = U(\mathfrak{a}_\mathbf{C}) \oplus (\mathfrak{n}_\mathbf{C} U(\mathfrak{g}_\mathbf{C}) + U(\mathfrak{g}_\mathbf{C})\mathfrak{k}_\mathbf{C}) \to U(\mathfrak{a}_\mathbf{C}) \simeq S(\mathfrak{a}_\mathbf{C})$$

とそれに続く平行移動

$$S(\mathfrak{a}_\mathbf{C}) \ni f(\lambda) \mapsto f(\lambda + \rho) \in S(\mathfrak{a}_\mathbf{C})$$

の合成で定義し, これを Harish-CHandra 準同型と呼ぶ. ここで $S(\mathfrak{a}_\mathbf{C})$ を $\mathfrak{a}_\mathbf{C}$ の双対空間 $(\mathfrak{a}_\mathbf{C})^*$ 上の正則な多項式函数の空間と同一視した. $U(\mathfrak{g}_\mathbf{C})^K$, $S(\mathfrak{a}_\mathbf{C})^W$ をそれぞれ K, W の作用のもとでの $U(\mathfrak{g}_\mathbf{C})$, $S(\mathfrak{a}_\mathbf{C})$ の不変式環とする (一般に本稿ではある作用域に対する不変部分空間を作用域の添字を右上に付けて表す). Harish-Chandra は [HC] で次の環準同型列の完全性を示した[1]:

$$0 \to U(\mathfrak{g}_\mathbf{C})^K \cap U(\mathfrak{g}_\mathbf{C})\mathfrak{k}_\mathbf{C} \to U(\mathfrak{g}_\mathbf{C})^K \xrightarrow{\gamma} S(\mathfrak{a}_\mathbf{C})^W \to 0. \tag{1.1}$$

一方, $B(\cdot,\cdot)$ を $\mathfrak{g}$ または $\mathfrak{g}_\mathbf{C}$ の Killing 形式とし, $\mathfrak{a}^\perp$ を $\mathfrak{p}$ 内での $\mathfrak{a}$ の $B(\cdot,\cdot)$ に関する直交補空間とすると,

$$S(\mathfrak{p}_\mathbf{C}) = S(\mathfrak{a}_\mathbf{C}) \oplus S(\mathfrak{p}_\mathbf{C})(\mathfrak{a}^\perp)_\mathbf{C} \to S(\mathfrak{a}_\mathbf{C}).$$

で定まる射影 $\gamma_0 : S(\mathfrak{p}_\mathbf{C}) \to S(\mathfrak{a}_\mathbf{C})$ は, 環同型

$$\gamma_0 : S(\mathfrak{p}_\mathbf{C})^K \xrightarrow{\sim} S(\mathfrak{a}_\mathbf{C})^W, \tag{1.2}$$

*e-mail : hoda@la.takushoku-u.ac.jp

[1] 実際には, [HC] では $G = G_{\mathrm{ad}}$ の場合が扱われている. 一般の場合は [KR, Proposition 10] により (1.2) が任意の G で成立することによる.

を与える．これは“Chevalley の制限定理”と呼ばれ，(1.1) はこれを非可換化したものと考えられる．それは，対称化写像 symm : $S(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) \to U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ を用いた K-加群の直和分解

$$U(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) = \mathrm{symm}(S(\mathfrak{p}_\mathbb{C})) \oplus U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})\mathfrak{k}_\mathbb{C}. \tag{1.3}$$

から理解できる．(1.1) と (1.2) により 3 つの環 $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^K/U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^K \cap U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})\mathfrak{k}_\mathbb{C}, S(\mathfrak{p}_\mathbb{C})^K, S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})^W$ は互いに同一視できるが，それらを同じ記号 $\mathscr{A}$ で表す．

(1.1) と (1.2) はそれぞれ次のように書き直すことができる:

$$0 \to \mathrm{Hom}_K(\mathrm{triv}, U(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) \cap U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})\mathfrak{k}_\mathbb{C}) \to \mathrm{Hom}_K(\mathrm{triv}, U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})) \xrightarrow{\Gamma^{\mathrm{triv}}} \mathrm{Hom}_W(\mathrm{triv}, S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})) \to 0, \tag{1.4}$$

$$\Gamma_0^{\mathrm{triv}} : \mathrm{Hom}_K(\mathrm{triv}, S(\mathfrak{p}_\mathbb{C})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_W(\mathrm{triv}, S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})). \tag{1.5}$$

ここで“triv”は K や W の単位表現とする（従って $\mathbb{C}$ が表現空間）．Γ^{triv} や Γ_0^{triv} の定義は明らかであろう．

我々はまず (1.5) の形の Chevalley の制限定理を一般化することを考える．K-タイプ (σ, V) のうち，K の表現 $(\mathrm{Ad}|_K, S(\mathfrak{p}_\mathbb{C}))$ に実際に現れるものを“quasi-spherical”な K-タイプと呼ぶ．[KR] によると (σ, V) が quasi-spherical であることは $V^M \neq 0$ であることと同値であるが，このとき Weyl 群 W が V^M に自然に作用する．写像

$$\Gamma_0^\sigma : \mathrm{Hom}_K(V, S(\mathfrak{p}_\mathbb{C})) \ni \Phi \mapsto \varphi \in \mathrm{Hom}_W(V^M, S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})) \tag{1.6}$$

を，像 φ が

$$\varphi : V^M \hookrightarrow V \xrightarrow{\Phi} S(\mathfrak{p}_\mathbb{C}) \xrightarrow{\gamma_0} S(\mathfrak{a}_\mathbb{C}) \tag{1.7}$$

となるように定める．明らかにこれは well-defined で $(\sigma, V) = (\mathrm{triv}, \mathbb{C})$ の場合は (1.5) における Γ_0^{triv} と一致する．$\mathrm{Hom}_K(V, S(\mathfrak{p}_\mathbb{C}))$，$\mathrm{Hom}_W(V^M, S(\mathfrak{a}_\mathbb{C}))$ は像への $S(\mathfrak{p}_\mathbb{C})^K$，$S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})^W$ の要素の掛け算により自然に $\mathscr{A}$-加群の構造を持つが，Γ_0^σ は 2 つの $\mathscr{A}$-加群の間の準同型になっている．ここで新しい K-タイプのクラスを定義する．

定義 1.1. $B(\cdot,\cdot)$ により $\mathfrak{a}$ とその双対 $\mathfrak{a}^*$ を同一視し，$\mathfrak{a}^*$ に内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を入れる．$\alpha \in \mathfrak{a}^*$ に対して $|\alpha| = \langle\alpha, \alpha\rangle^{\frac{1}{2}}$ と定める．$\Sigma_1 = \Sigma \setminus 2\Sigma$ と置き，$\mathscr{R}$ を Σ_1 の W-軌道の代表元を集めた任意の集合とする．また，各 $\alpha \in \mathscr{R}$ に対して $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ を 1 つ固定しておく．このとき，quasi-spherical な K-タイプ (σ, V) が“single-petaled”であることを，

$$\sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)(\sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)^2 - 2|\alpha|^2 B(X_\alpha, \theta X_\alpha))v = 0 \qquad (\forall v \in V^M, \forall \alpha \in \mathscr{R}) \tag{1.8}$$

が成り立つことと定義する．

注意 1.2. $\mathfrak{g}_\alpha$ は $-B(\cdot, \theta\cdot)$ という正定値内積を持ち，M が等長変換群として作用している．[Ko2, Theorem 2.1.7] により $\dim \mathfrak{g}_\alpha > 1$ であれば M が $\mathfrak{g}_\alpha$ の単位球面に推移的に作用するので，(1.8) に M の要素やスカラーを掛けることにより，上の定義が X_α の選び方に依らないことが分かる．また，(1.8) に $N_K(\mathfrak{a})$ の要素を掛けることにより，(1.8) の $\mathscr{R}$ を Σ_1 全体に置き換えても同じ条件になっていることが分かる．従って上の定義は $\mathscr{R}$ の選び方にも依らない．

この準備のもと次がいえる：

定理 1.3. 全ての quasi-spherical な (σ, V) に対して Γ_0^σ は単射．一方，Γ_0^σ が全射であることと Γ_0^σ が single-petaled であることは同値である．

この定理は複素半単純 Lie 環の場合の Broer の結果（[Br]）の Riemann 対称空間の場合への一般化である．ところで [Br] の論文の脚注に，Kostant が Broer に知らせたとされる [PRV] の結果を用いた別証明の存在が述べられている．証明の内容は書かれていないが，確かに [PRV] で考察された多項式を成分とする正方行列（2 章参照）を用いると簡単な証明が可能である．実はこの正方行列の Riemann 対称空間版を Kostant 自身が研究していて（[Ko2]），その結果により定理 1.3 を完全に代数的に示すことができるのだが，本稿 §3 で述べる証明は [Da] に倣った解析的なものである．この方法によると定理 1.3 を更にいくつかの方向に一般化した形（命題 3.1，定理 3.5，定理 3.15）で示すことができる．

(1.4) を一般化するには $(\mathfrak{n}, \mathfrak{a})$ というデータから定まる退化 Hecke 環 $\mathbf{H}$ が必要になる．正確な定義は §4 で行うが（定義 4.1），ここで $\mathbf{H}$ のいくつかの性質を述べる．$\mathbf{H}$ は $\mathbb{C}$ 上の代数で $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ と群環 $\mathbb{C}[W]$ を部分環として含む．また，$\mathbb{C}$-線型空間として $\mathbf{H} \simeq S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}) \otimes \mathbb{C}[W]$ である．従って左 $\mathbf{H}$-加群

(1.9) $$S_{\mathbf{H}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}) := \mathbf{H} \Big/ \sum_{w \in W \setminus \{1\}} \mathbf{H}(w-1) \simeq S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}) \otimes \mathbb{C}[W] \Big/ S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}) \otimes \sum_{w \in W \setminus \{1\}} \mathbb{C}[W](w-1)$$

を自然に $\mathbb{C}$-線型空間として $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ と同一視できる．$S_{\mathbf{H}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ への $W \subset \mathbf{H}$ の作用が通常のものと違うことは注意すべきである．一方，$\mathbf{H}$ の中心は $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^W$ に等しく（系 4.4），これから $S_{\mathbf{H}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ の W-不変部分空間が $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^W$ であることが分かる．従って (1.4) において $\mathrm{Hom}_W(\mathrm{triv}, S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}))$ を $\mathrm{Hom}_W(\mathrm{triv}, S_{\mathbf{H}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}))$ で置き換えることが可能である．

(σ, V) を quasi-spherical K-タイプとする．写像

(1.10) $$\Gamma^\sigma : \mathrm{Hom}_K(V, U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})) \ni \Psi \mapsto \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^M, S_{\mathbf{H}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}))$$

を，像 ψ が

(1.11) $$\psi : V^M \hookrightarrow V \xrightarrow{\Psi} U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\gamma} S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}) \simeq S_{\mathbf{H}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$$

となるように定める．右辺の (1.10) が $\mathrm{Hom}_W(V^M, S_{\mathbf{H}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}))$ でないことに注意する．実際，(1.11) で定まる ψ は必ずしも W の作用と可換ではない．本稿の主結果を述べる（証明は §4）．

定理 1.4. 全ての (σ, V) に対して Γ^σ の核は $\mathrm{Hom}_K(V, U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})$ である．Γ^σ の像が $\mathrm{Hom}_W(V^M, S_{\mathbf{H}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}))$ に含まれるためには (σ, V) が single-petaled であることが必要十分である．この場合像は $\mathrm{Hom}_W(V^M, S_{\mathbf{H}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}))$ に一致し，次が完全になる：

(1.12) $$0 \to \mathrm{Hom}_K(V, U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}) \to \mathrm{Hom}_K(V, U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})) \xrightarrow{\Gamma^\sigma} \mathrm{Hom}_W(V^M, S_{\mathbf{H}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})) \to 0.$$

注意 1.5. $D \in U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^K, \Psi \in \mathrm{Hom}_K(V, U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))$ とすると，Ψ の像に右から D を掛けることにより新しい $\mathrm{Hom}_K(V, U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))$ の要素 $\Psi \cdot D$ が定まる．このように $\mathrm{Hom}_K(V, U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))$ は右 $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^K$-加群となる．また，この作用により $\mathrm{Hom}_K(V, U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))/\mathrm{Hom}_K(V, U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}) \simeq \mathrm{Hom}_K(V, U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})/U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})$ は $\mathscr{A}$-加群になる．明らかに

(1.13) $$\Gamma^\sigma(\Psi \cdot D) = \Gamma^\sigma(\Psi) \cdot \gamma(D) \qquad \forall D \in U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^K, \forall \Psi \in \mathrm{Hom}_K(V, U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))$$

であるから，Γ^σ は $\mathscr{A}$-加群の準同型 $\mathrm{Hom}_K(V, U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})/U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^M, S_{\mathbf{H}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}))$ を導く．更に (σ, V) が single-petaled である場合には同型写像 $\mathrm{Hom}_K(V, U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})/U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_W(V^M, S_{\mathbf{H}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}))$ が得られる．

2 quasi-sperical K-タイプ

この節では quasi-sperical K-タイプに関する結果で後の節で必要となるものをまとめる．殆どが既知の結果である．

K-加群 $S(\mathfrak{p}_\mathbb{C})$ を Killing 形式により $\mathfrak{p}$ 上の $\mathbb{C}$-値多項式函数全体が作る K-加群 $\mathscr{P}(\mathfrak{p})$ と同一視する．各 $X \in \mathfrak{p}$ は $\mathfrak{p}$ 上の偏微分作用素 $\partial(X)$ を定めるが，この対応 $\partial : X \mapsto \partial(X)$ を $S(\mathfrak{p}_\mathbb{C})$ から $\mathfrak{p}$ 上の偏微分作用素の環への準同型へ拡張する．$S(\mathfrak{p}_\mathbb{C}) \simeq \mathscr{P}(\mathfrak{p})$ の要素で全ての $F \in S(\mathfrak{p}_\mathbb{C})^K \cap S(\mathfrak{p}_\mathbb{C})\mathfrak{p}_\mathbb{C}$ に対する $\partial(F)$ で消えるものを $\mathfrak{p}$ 上の K-調和多項式と呼び，その全体を $\mathscr{H}_K(\mathfrak{p})$ で表す（$\mathscr{H}_K(\mathfrak{p})$ は G の取り方に依らないことに注意）．次は本質的に [KR] による：

命題 2.1. 環の積で定義される自然な写像

$$S(\mathfrak{p}_\mathbb{C})^K \otimes \mathscr{H}_K(\mathfrak{p}) \to S(\mathfrak{p}_\mathbb{C})$$

は K-加群の同型を与える．更に，K の任意の $\mathbb{C}$ 上の有限次元表現 (σ, V) に対して $\dim_\mathbb{C} \mathrm{Hom}_K(V, \mathscr{H}_K(\mathfrak{p})) = \dim_\mathbb{C} V^M$，従って

$$\text{(2.1)} \qquad \mathrm{Hom}_K(V, S(\mathfrak{p}_\mathbb{C})) \simeq \mathscr{A} \otimes \mathrm{Hom}_K(V, \mathscr{H}_K(\mathfrak{p})) \simeq \mathscr{A}^{\oplus m(\sigma)} \qquad \text{ここで } m(\sigma) = \dim_\mathbb{C} V^M$$

が成り立つ．

系 2.2. K-加群として $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) = U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})\mathfrak{k}_\mathbb{C} \oplus \mathrm{symm}(\mathscr{H}_K(\mathfrak{p})) \otimes \mathrm{symm}(S(\mathfrak{p}_\mathbb{C})^K)$ という分解が成立する．

(σ, V) を quasi-spherical K-タイプとする．$m(\sigma) = \dim_\mathbb{C} V^M$，$\{v_1, \dots, v_{m(\sigma)}\}$ を V^M の基，$\{\Phi_1, \dots, \Phi_{m(\sigma)}\}$ を $\mathrm{Hom}_K(V, \mathscr{H}_K(\mathfrak{p}))$ の基とする．また，$\Psi_j = \mathrm{symm} \circ \Phi_j \in \mathrm{Hom}_K(V, U(\mathfrak{g}))$ $(j = 1, \dots, m(\sigma))$ と置く．[Ko1], [Ko2] では，本稿の主題と深く関わる $S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$ 成分の $m(\sigma) \times m(\sigma)$ 行列 $P^\sigma = (\gamma \circ \Psi_j[v_i])$ が研究され，$\det P^\sigma$ が具体的に計算されている．明らかに $\det P^\sigma$ はスカラー倍を除いて $\{v_i\}, \{\Phi_j\}$ の選び方に依らずに定まる．

命題 2.3. $\lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ が全ての $\alpha \in \Sigma^+$ に対して $\mathrm{Re}\langle \lambda, \alpha \rangle \geq 0$ を満たすならば（$\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathfrak{a}^*$ の内積を $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ 上複素線型に延長したもの），各 (σ, V) に対して $(\det P^\sigma)(\lambda) \neq 0$.

証明. [Ko1], [Ko2] で $G = G_\theta$ の場合が示されているのでその結果を一般の G の場合に翻訳する．$G = G_\theta$ に対する K, M をそれぞれ K_θ, M_θ と表す．F を $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ の随伴群の部分群 $\exp \mathfrak{a}_\mathbb{C}$ の要素で位数が 2 以下のもの全体が作る K_θ の部分群とする．F は K, M を正規化し，$K_\theta = KF, M_\theta = MF$ が成り立つ（[KR, Proposition 1, Lemma 20]）．更に，明らかに F の適当な部分群 F_1 を選んで $K_\theta = K \rtimes F_1, M_\theta = M \times F_1$ とできる．(σ, V) を quasi-spherical K-タイプとすると $V_\theta := \mathbb{C}[F_1] \otimes V$ には自然に K_θ-加群の構造 σ_θ が入る．つまり，$\sigma_\theta(ka)(a' \otimes v) = aa' \otimes (a'akaa')v$ $(k \in K, a, a' \in F, v \in V)$ とするのである．$V_\theta = \bigoplus_{a \in F_1} a \otimes V, (V_\theta)^M = \bigoplus_{a \in F_1} a \otimes V^M$ であるから $(V_\theta)^{M_\theta} = \left(\frac{1}{\# F_1} \sum_{a \in F_1} a\right) \otimes V^M$ となる．$(\sigma_\theta, V_\theta) = (\sigma_1, V_1) \oplus \cdots \oplus (\sigma_{t'}, V_{t'})$ を K_θ-加群としての既約分解とし，そのうち $(\sigma_1, V_1), \dots, (\sigma_t, V_t)$ がちょうど quasi-spherical であるとする．$\left(\frac{1}{\# F_1} \sum_{a \in F_1} a\right) \otimes V^M = (V_1)^{M_\theta} \oplus \cdots \oplus (V_t)^{M_\theta}$ より $m(\sigma) = m(\sigma_1) + \cdots + m(\sigma_t)$ である．V^M の基 $\{v_1^{(1)}, \dots, v_{m(\sigma_1)}^{(1)}, \dots, v_1^{(t)}, \dots, v_{m(\sigma_t)}^{(t)}\}$ を各 $s = 1, \dots, t$ について $\left\{\left(\frac{1}{\# F_1} \sum_{a \in F_1} a\right) \otimes v_1^{(s)}, \dots, \left(\frac{1}{\# F_1} \sum_{a \in F_1} a\right) \otimes v_{m(\sigma_s)}^{(s)}\right\}$ が $(V_s)^{M_\theta}$ の基となるように取る．一方，$(\sigma_\theta, V_\theta)$ は (σ, V) から誘導された K_θ の表現と考えられるので，K-準同型 $\iota_s : V \hookrightarrow V_\theta \xrightarrow{\text{射影}} V_s$ $(s = 1, \dots, t)$ により，同型

$$\bigoplus_{s=1}^{t} \mathrm{Hom}_{K_\theta}(V_s, \mathscr{H}_{K_\theta}(\mathfrak{p})) \ni (\Phi^{(1)}, \dots, \Phi^{(t)}) \longmapsto \Phi^{(1)} \circ \iota_1 + \cdots + \Phi^{(t)} \circ \iota_t \in \mathrm{Hom}_K(V, \mathscr{H}_K(\mathfrak{p}))$$

を得る．従って各 $s = 1, \dots, t$ について $\mathrm{Hom}_{K_\theta}(V_s, \mathscr{H}_{K_\theta}(\mathfrak{p}))$ の基 $\{\Phi_1^{(s)}, \dots, \Phi_{m(\sigma_s)}^{(s)}\}$ を取ると，

$$\left\{\Phi_1^{(1)} \circ \iota_1, \dots, \Phi_{m(\sigma_1)}^{(1)} \circ \iota_1, \dots, \Phi_1^{(t)} \circ \iota_t, \dots, \Phi_{m(\sigma_t)}^{(t)} \circ \iota_t\right\}$$

が $\mathrm{Hom}_K(V, \mathscr{H}_K(\mathfrak{p}))$ の基となる．この基と上で取った V^M の基に関する P^σ について考えよう．M_θ は $\mathfrak{k}_\mathbb{C}, \mathfrak{n}_\mathbb{C}$ を正規化するので，γ は定義から M_θ-準同型である．また，$S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$ は自明な M_θ-加群なので，各 $D \in U(\mathfrak{g})$

について $\gamma(D)=\gamma\left(\left(\frac{1}{\#F_1}\sum_{a\in F_1}a\right)D\right)$ となる．これより $s,s'=1,\ldots,t,\ i=1,\ldots,m(\sigma_{s'}),\ j=1,\ldots,m(\sigma_s)$ について

$$\gamma\circ\mathrm{symm}\circ\Phi_j^{(s)}\circ\iota_s[v_i^{(s')}]=\begin{cases}\gamma\circ\mathrm{symm}\circ\Phi_j^{(s)}\left[\left(\frac{1}{\#F_1}\sum_{a\in F_1}a\right)\otimes v_i^{(s)}\right] & (s=s'\text{のとき})\\ 0 & (s\neq s'\text{のとき})\end{cases}$$

が成り立ち，等式

$$P^{\sigma}=\begin{pmatrix}P^{\sigma_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & P^{\sigma_t}\end{pmatrix}\tag{2.2}$$

を得る．従って我々は主張は明らか．　□

次に基本的な single-petaled K-タイプについて考察する．自明な K-タイプは明らかに single-petaled であるが，その他の非自明な single-petaled K-タイプの例が $(\mathrm{Ad},\mathfrak{p}_{\mathbb{C}})$ から作られる．

補題 2.4. 各 $\alpha\in\Sigma$（Σ_1 ではない！），$X_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha$，$H\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ に対して

$$\mathrm{ad}(X_\alpha+\theta X_\alpha)(\mathrm{ad}(X_\alpha+\theta X_\alpha)^2-2|\alpha|^2B(X_\alpha,\theta X_\alpha))H=0.$$

証明. $\alpha(H)=0$ である H については $\mathrm{ad}(X_\alpha+\theta X_\alpha)H=0$．一方，Killing 形式で α と同一視される要素 $H_\alpha\in\mathfrak{a}$ に対して

$$\begin{aligned}(\mathrm{ad}(X_\alpha+\theta X_\alpha)^2-2|\alpha|^2B(X_\alpha,\theta X_\alpha))H_\alpha&=|\alpha|^2\,\mathrm{ad}(X_\alpha+\theta X_\alpha)(-X_\alpha+\theta X_\alpha)-2|\alpha|^2B(X_\alpha,\theta X_\alpha)H_\alpha\\&=2|\alpha|^2([X_\alpha,\theta X_\alpha]-B(X_\alpha,\theta X_\alpha)H_\alpha)\\&=0.\end{aligned}$$
□

定理 2.5. $\mathfrak{g}$ は単純とする．

(i) G/K が Hermite 型のとき，J を $\mathfrak{p}$ の K-不変な複素構造を $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ への $\mathbb{C}$-線型に延長したもの，$\mathfrak{p}_\pm$ を J の固有値 $\pm\sqrt{-1}$ の固有空間とする．このとき $(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}})^M=\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}\oplus J\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ である．2つの K-タイプ $(\mathrm{Ad},\mathfrak{p}_\pm)$ はともに single-petaled で，W-加群として $(\mathfrak{p}_\pm)^M\simeq\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$（鏡映表現）．

(ii) G/K が Hermite 型でないとき，K-タイプ $(\mathrm{Ad},\mathfrak{p}_{\mathbb{C}})$ は single-petaled で，W-加群として $(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}})^M\simeq\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$（鏡映表現）．

証明. $G=G_{\mathrm{ad}}$ の場合の $(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}})^M$ に関する結果は [Jo, Proposition 4.1] による．
(i) G/K が Hermite 型であれば $G_{\mathrm{ad}}/(K\cap G_{\mathrm{ad}})$ も当然 Hermite 型である．このとき [Jo] より $(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}})^{M\cap G_{\mathrm{ad}}}=\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}\oplus J\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ であるが，J と K の $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ への作用が可換であるから $(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}})^M=\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}\oplus J\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$．$K$-同型 $\frac{1\mp\sqrt{-1}J}{2}:\mathfrak{p}\xrightarrow{\sim}\mathfrak{p}_\pm$ と補題 2.4 より残りは明らか．
(ii) G/K が Hermite 型でないとする．$G_{\mathrm{ad}}/(K\cap G_{\mathrm{ad}})$ が Hermite 型であるとき，その複素構造 J により $(K\cap G_{\mathrm{ad}})$-加群の分解 $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}=\mathfrak{p}_+\oplus\mathfrak{p}_-$ が得られる．(i) と命題 2.1 により $\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_{K\cap G_{\mathrm{ad}}}(\mathfrak{p}_+,\mathscr{H}_K(\mathfrak{p}))=\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$．一方，$J$ と K の $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ への作用が非可換であるから $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ は K-加群として既約となり，自然な単射 $\mathrm{Hom}_K(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}},\mathscr{H}_K(\mathfrak{p}))\to\mathrm{Hom}_{K\cap G_{\mathrm{ad}}}(\mathfrak{p}_+,\mathscr{H}_K(\mathfrak{p}))$ が得られる．従って命題 2.1 により $\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}})^M\leq\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$．ここで $(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}})^M\supset\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ より $(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}})^M=\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$．

今度は $G_{\mathrm{ad}}/(K\cap G_{\mathrm{ad}})$ が Hermite 型でないとする．このとき [Jo] より $(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}})^{(M\cap G_{\mathrm{ad}})}=\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ であるので，$(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}})^M=\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$．残りは補題 2.4 より明らか．　□

最後に $\mathfrak{g}$ を実ランク 1 の半単純 Lie 環とし，その quasi-spherical K-タイプを詳しく見る．$\Sigma_1 \cap \Sigma^+$ の唯一の要素を α とし，$X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ を $B(X_\alpha, \theta X_\alpha) = -\frac{1}{2|\alpha|^2}$ となるように選んで固定し，$Z = \sqrt{-1}X_\alpha + \sqrt{-1}\theta X_\alpha$ と置く．すると quasi-spherical な (σ, V) が single-petaled であるための条件 (1.8) は $Z(Z^2-1)V^M = 0$ となる．

補題 2.6. (σ, V) を quasi-spherical K-タイプとする．

(i) $\sigma(Z)$ の固有値は全て整数である．以下ではその最大のものを $e(\sigma)$ とする．

(ii) $\dim_{\mathbb{C}} V^M = 1$．従って $v^\sigma \in V^M \setminus \{0\}$，$\Phi^\sigma \in \mathrm{Hom}_K(V, \mathscr{H}_K(\mathfrak{p})) \setminus \{0\}$ はスカラー倍を除いて一意に定まる．

(iii) $V^{Z-e(\sigma)}$ を $\sigma(Z)$ の固有値 $e(\sigma)$ の固有空間とする．V 上の K-不変 Hermite 内積 $(\cdot,\cdot)_V$ に関する V^M の直交補空間を $(V^M)^\perp$ とすると，$V^{Z-e(\sigma)} \not\subset (V^M)^\perp$．

(iv) $h = \frac{\alpha^\vee}{2} + \frac{\dim \mathfrak{g}_\alpha}{2} \in S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$，$\delta = \dim \mathfrak{g}_{2\alpha}$ とする（$\alpha^\vee$ は α のコルート $\frac{2H_\alpha}{|\alpha|^2}$）．$2i + j = |e(\sigma)|$ を満たす非負整数 i, j が存在して，$\gamma \circ \mathrm{symm} \circ \Phi^\sigma[v^\sigma] = \det P^\sigma$ は

$$
[(h+\delta)(h+\delta+2)\cdots(h+\delta+2(i+j)-2)] \cdot [(h+1)(h+3)\cdots(h+2i-1)] \tag{2.3}
$$

にスカラー倍を除いて一致する．

(v) (σ, V) が自明な K-タイプ $\Leftrightarrow$ $e(\sigma) = 0$．(σ, V) が $(\mathrm{Ad}, \mathfrak{p}_{\mathbb{C}})$ に現れる K-タイプ $\Leftrightarrow$ $|e(\sigma)| = 1$．

証明. 命題 2.3 の証明で用いた記号を用いる．$\mathfrak{g}$ は単純としてよい．$G = G_\theta$ の場合は [Ko1]，[Ko2] の結果．$G \neq G_\theta$ とする．$\mathfrak{g} \neq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ のときは全ての quasi-spherical K_θ-タイプ (σ, V) は K-加群として既約で $V^{M_\theta} = V^M$ であるからよい（[Ko2, Chapter II, §2]）．一方，$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}), \mathfrak{k} = \mathfrak{so}(2, \mathbb{R})$ の場合は $G = G_{\mathrm{ad}}$ であり，$a = \mathrm{Ad}\left(\begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix}\right)$ と置くと $F_1 = \{1, a\}$ である．また，$Z = \pm\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{-1} \\ \frac{1}{2}\sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$．整数 e に対し quasi-spherical K-タイプ (σ_e, V_e) が $V_e = \mathbb{C}$ に $\sigma_e(Z) = e$ という作用を入れて定まるが，これらが quasi-spherical K-タイプの全てである．各 (σ_e, V_e) に対して $(V_e)_\theta = 1 \otimes V_e + a \otimes V_e$，$K$-加群として $a \otimes V_e \simeq V_{-e}$ である．$e \neq 0$ のときは $(V_e)_\theta$ は既約 K_θ-加群となり，(2.2) より $P^{\sigma_e} = P^{(\sigma_e)_\theta}$ であるから (σ_e, V_e) に対して (i)–(iv) が成立する．$e = 0$ のときは $\sigma_e = \mathrm{triv}$ であり，このとき (i)–(iv) が成立するのは明らか．(v) の成立も明らか． □

3 Chevalley の制限定理

この節の目的は定理 1.3 の証明である．その方法は大部分古典的結果に対する [Da] の方法と同じであるが，有理型 Dunkl 作用素を用いる等により本質的に改良している部分もある．これは古典的結果の証明にも有効である．

§1 の設定のもと，(σ, V) を quasi-spherical な K-タイプとする．$\mathscr{F}$ で $\mathscr{C}$（連続函数），$\mathscr{C}^\infty$（無限回連続微分可能な函数），$\mathscr{P}$（多項式函数）のいずれかの $\mathbb{C}$-値函数のクラスを表すことにし，写像

$$
\mathrm{Hom}_K(V, \mathscr{F}(\mathfrak{p})) \ni \Phi \mapsto (\varphi : V^M \ni v \mapsto \Phi[v]|_{\mathfrak{a}}) \in \mathrm{Hom}_W(V^M, \mathscr{F}(\mathfrak{a})) \tag{3.1}
$$

を定義する．Killing 形式による同一視 $\mathscr{P}(\mathfrak{p}) \simeq S(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}), \mathscr{P}(\mathfrak{a}) \simeq S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ のもと，$\mathscr{F} = \mathscr{P}$ の場合の (3.1) は §1 の Γ_0^σ になる．よって同じ記号 Γ_0^σ を一般の (3.1) にも用いることにする．最初に次を示す：

命題 3.1. $\mathscr{F} = \mathscr{C}, \mathscr{C}^\infty, \mathscr{P}$ に対して Γ_0^σ は単射.

証明. $\mathscr{F} = \mathscr{C}$ としてよい.

$$V = V^M \oplus \sum_{\tau \neq \mathrm{triv}} V_\tau \tag{3.2}$$

を M-加群 $V = V|_M$ の等質成分 (isotypic component) への分解とし, 射影

$$p^\sigma : V = V^M \oplus \sum_{\tau \neq \mathrm{triv}} V_\tau \to V^M \tag{3.3}$$

を定める. 任意に $\Phi \in \mathrm{Hom}_K(V, \mathscr{C}(\mathfrak{p}))$ を取る. 明らかに各 $v \in V$ および各 $H \in \mathfrak{a}$ について $\Phi[v](H) = \Phi[p^\sigma(v)](H)$. Φ の像を $\varphi \in \mathrm{Hom}_W(V^M, \mathscr{C}(\mathfrak{a}))$ とする. 各元 $X \in \mathfrak{p}$ は適当な $k \in K$ と $H \in \mathfrak{a}$ により $X = \mathrm{Ad}(k)H$ と書けるので任意の $v \in V$ について

$$\begin{aligned}\Phi[v](X) &= \Phi[v](\mathrm{Ad}(k)H) = \Phi[\sigma(k^{-1})v](H)\\ &= \Phi[\,p^\sigma\big(\sigma(k^{-1})v\big)\,](H) = \varphi[\,p^\sigma\big(\sigma(k^{-1})v\big)\,](H).\end{aligned} \tag{3.4}$$

これは Φ が φ から完全に復元できることを示す. □

Γ_0^σ の像を議論するために, V^M の 2 つの W-部分加群を導入する：

定義 3.2.

$$\begin{aligned}V^M_{\mathrm{single}} &= \Big\{v \in V^M;\ \sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)(\sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)^2 - 2|\alpha|^2 B(X_\alpha, \theta X_\alpha))v = 0 \quad \forall \alpha \in \Sigma_1,\ \forall X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha\Big\},\\ V^M_{\mathrm{double}} &= V^M \cap \sum \Big\{\sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)(\sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)^2 - 2|\alpha|^2 B(X_\alpha, \theta X_\alpha))V;\ \alpha \in \Sigma_1,\ X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha\Big\}.\end{aligned}$$

補題 3.3. $V^M = V^M_{\mathrm{single}} \oplus V^M_{\mathrm{double}}$.

証明. $(\cdot,\cdot)_V$ を V 上の K-不変 Hermite 内積とすると, (3.2) における V^M や V_τ の等質成分は互いに直交する. $(V^M_{\mathrm{double}})^\perp$ を V^M_{double} の V^M における直交補空間とすると, $\sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)$ は $(\cdot,\cdot)_V$ に関して歪 Hermite なので $V^M_{\mathrm{single}} \subset (V^M_{\mathrm{double}})^\perp$. 逆に $v \in (V^M_{\mathrm{double}})^\perp$ とする. V^M_{double} は V の M-部分加群

$$\sum \Big\{\sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)(\sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)^2 - 2|\alpha|^2 B(X_\alpha, \theta X_\alpha))V;\ \alpha \in \Sigma_1,\ X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha\Big\}$$

の写像 (3.3) による像であるから, 各 $v' \in V$, $\alpha \in \Sigma_1$, $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ について

$$\begin{aligned}&\Big(\sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)(\sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)^2 - 2|\alpha|^2 B(X_\alpha, \theta X_\alpha))v, v'\Big)_V\\ &\qquad = -\Big(v, \sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)(\sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)^2 - 2|\alpha|^2 B(X_\alpha, \theta X_\alpha))v'\Big)_V\\ &\qquad = -\Big(v, p^\sigma\big(\sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)(\sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)^2 - 2|\alpha|^2 B(X_\alpha, \theta X_\alpha))v'\big)\Big)_V\\ &\qquad = 0\end{aligned}$$

となり, $v \in V^M_{\mathrm{single}}$ を得る. 従って $V^M_{\mathrm{single}} = (V^M_{\mathrm{double}})^\perp$. □

注意 1.2 により (σ, V) が single-petaled であることと $V^M_{\mathrm{double}} = 0$ であることは同値である.

補題 3.4. 各 $\alpha \in \Sigma$, $v \in V^M_{\mathrm{single}}$, $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ に対して

$$\sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)(\sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)^2 - 2|\alpha|^2 B(X_\alpha, \theta X_\alpha))v = 0.$$

証明. 注意 1.2 によりルート $2\alpha \in \Sigma \setminus \Sigma_1$ に対して証明すれば十分である．$\mathfrak{g}(\alpha) = \mathfrak{m} + \mathbb{R}H_\alpha + \sum_{\beta \in \Sigma \cap \mathbb{Z}\alpha} \mathfrak{g}_\beta$，$\mathfrak{g}_{ss}(\alpha) = [\mathfrak{g}(\alpha), \mathfrak{g}(\alpha)]$ と置くと，$\mathfrak{g}_{ss}(\alpha)$ は実ランク 1 の半単純 Lie 環である．$\mathfrak{k}_{ss}(\alpha) = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_{ss}(\alpha)$，$G_{ss}(\alpha)$ を $\mathfrak{g}_{ss}(\alpha)$ の解析的部分群（analytic subgroup）とし，$K_{ss}(\alpha) = K \cap G_{ss}(\alpha)$，$M_{ss}(\alpha) = N_{K \cap G_{ss}(\alpha)}(\mathbb{R}H_\alpha)$ と置く．$U(\mathfrak{k}_{ss}(\alpha)_{\mathbb{C}})v$ を既約 $K_{ss}(\alpha)$-加群の直和 $V^{(1)} \oplus \cdots \oplus V^{(t)}$ に分解して $v = v^{(1)} + \cdots + v^{(t)}$ を対応する分解とする．$M \cap G_{ss}(\alpha) = M_{ss}(\alpha)$ であるので，$v^{(s)}$（$s = 1, \ldots, t$）は $V^{(s)}$ の 0 でない $M_{ss}(\alpha)$-不変ベクトルである．また，$M_{ss}(\alpha)$ は $G_{ss}(\alpha)$ の中心を含むので $V^{(s)}$（$s = 1, \ldots, t$）は実質的に $\mathfrak{g}_{ss}(\alpha)$ の随伴群の "K-タイプ" と見做せ（ここでは単純に $K_{ss}(\alpha)$-タイプと称す），§2 の結果を適用できる．$X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ を $B(X_\alpha, \theta X_\alpha) = -\frac{1}{2|\alpha|^2}$ となるように選んで固定し，$Z = \sqrt{-1}X_\alpha + \sqrt{-1}\theta X_\alpha$ と置く．$v \in V^M_{\mathrm{single}}$ であるから $Z(Z^2-1)v = 0$．$Z \in \mathfrak{k}_{ss}(\alpha)_{\mathbb{C}}$ であるから $Z(Z^2-1)v^{(s)} = 0$（$s = 1, \ldots, t$）である．よって補題 2.6 (ii),(iii),(v) により $V^{(s)}$（$s = 1, \ldots, t$）は自明な $K_{ss}(\alpha)$-タイプか $(\mathrm{Ad}, \mathfrak{p}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{g}_{ss}(\alpha)_{\mathbb{C}})$ に現れる $K_{ss}(\alpha)$-タイプである．従って定理 2.5 と補題 2.4 より

$$\sigma(X_{2\alpha} + \theta X_{2\alpha})(\sigma(X_{2\alpha} + \theta X_{2\alpha})^2 - 2|2\alpha|^2 B(X_{2\alpha}, \theta X_{2\alpha}))v^{(s)} = 0, \qquad s = 1, \ldots, t$$

が成り立つ． □

$$\mathrm{Hom}_W(V^M/V^M_{\mathrm{double}}, \mathscr{F}(\mathfrak{a})) = \{\varphi \in \mathrm{Hom}_W(V^M, \mathscr{F}(\mathfrak{a})); \varphi[v] = 0 \quad \forall v \in V^M_{\mathrm{double}}\}$$

と置くと定理 1.3 の一部を精密化した次を得る：

定理 3.5. $\mathscr{F} = \mathscr{C}, \mathscr{C}^\infty, \mathscr{P}$ とする．任意の $\varphi \in \mathrm{Hom}_W(V^M/V^M_{\mathrm{double}}, \mathscr{F}(\mathfrak{a}))$ に対して $\Gamma^\sigma_0(\Phi) = \varphi$ となる $\Phi \in \mathrm{Hom}_K(V, \mathscr{F}(\mathfrak{p}))$ が唯一存在する．

証明はやや長く，この節の残りの殆どがそれに費やされる．命題 3.1 の証明で用いた記号を使う．まず $\mathscr{F} = \mathscr{C}$ の場合を示す．$\varphi \in \mathrm{Hom}_W(V^M/V^M_{\mathrm{double}}, \mathscr{C}(\mathfrak{a}))$ とする．各 $v \in V$ に対して $\Phi_v \in \mathscr{C}(K \times \mathfrak{a})$ を

(3.5) $$\Phi_v(k, H) = \varphi[p^\sigma\big(\sigma(k^{-1})v\big)](H) \qquad (k, H) \in K \times \mathfrak{a}$$

により定める．

補題 3.6. $k_1, k_2 \in K$ と $H_1, H_2 \in \mathfrak{a}$ が $\mathrm{Ad}(k_1)H_1 = \mathrm{Ad}(k_2)H_2$ を満たすとする．このとき各 $v \in V$ について $\Phi_v(k_1, H_1) = \Phi_v(k_2, H_2)$.

証明. H_1 と H_2 は $N_K(\mathfrak{a})$ のある元で共役である（[He1, Chapter VII, Proposition 2.2]）．定義 (3.5) より任意の $v \in V$，$k, k_1 \in K$，$\bar{w} \in N_K(\mathfrak{a})$，$H \in \mathfrak{a}$ について以下が成立する：

$$\Phi_v(k_1^{-1}k, H) = \Phi_{\sigma(k_1)v}(k, H),$$
$$\Phi_v(k\bar{w}, H) = \Phi_v(k, wH) \qquad ここで\ w := \bar{w} \bmod M \in W.$$

従って次を示せばよい：

(3.6) $$\Phi_v(k, H) = \Phi_v(e, H) \qquad H \in \mathfrak{a}, k \in K^H, v \in V.$$

但し，e は K の単位元，K^H は K における H の中心化群とした．このために $H \in \mathfrak{a}$ を任意に取って固定し，$\lambda_H \in V^*$ を

$$\lambda_H : V \ni v \mapsto \Phi_v(e, H)$$

で定義する．(σ^*, V^*) を (σ, V) と双対な K-タイプとし，$(\cdot,\cdot)$ を $V^* \times V$ 上の標準的な双一次形式とする．$\bar{w} \in N_K(\mathfrak{a}) \cap K^H$ と $v \in V$ に対して

$$\begin{aligned}(\sigma^*(\bar{w})\lambda_H, v) &= (\lambda_H, \sigma(\bar{w}^{-1})v) = \Phi_{\sigma(\bar{w}^{-1})v}(e, H)\\ &= \Phi_v(\bar{w}, H) = \Phi_v(e, wH) = \Phi_v(e, H) = (\lambda_H, v).\end{aligned}$$

これは $\bar{w} \in N_K(\mathfrak{a}) \cap K^H$ に対して $\sigma^*(\bar{w})\lambda_H = \lambda_H$，特に $\lambda_H \in (V^*)^M$ であることを示す．更に，$\alpha \in \Sigma_1$，$X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$，$v \in V$ に対して

$$\begin{aligned}
&\Big(\sigma^*(X_\alpha + \theta X_\alpha)(\sigma^*(X_\alpha + \theta X_\alpha)^2 - 2|\alpha|^2 B(X_\alpha, \theta X_\alpha))\lambda_H, v\Big)_V \\
&\qquad = -\Big(\lambda_H, \sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)(\sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)^2 - 2|\alpha|^2 B(X_\alpha, \theta X_\alpha))v\Big)_V \\
&\qquad = -\Phi_{\sigma(X_\alpha+\theta X_\alpha)(\sigma(X_\alpha+\theta X_\alpha)^2 - 2|\alpha|^2 B(X_\alpha,\theta X_\alpha))v}(e, H) \\
&\qquad = -\varphi[\, p^\sigma\Big(\sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)(\sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)^2 - 2|\alpha|^2 B(X_\alpha, \theta X_\alpha))v\Big)\,](H) \\
&\qquad = 0
\end{aligned}$$

である $\left(\because\ p^\sigma\Big(\sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)(\sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)^2 - 2|\alpha|^2 B(X_\alpha, \theta X_\alpha))v\Big) \in V^M_{\text{double}}\right)$．故に $\lambda_H \in (V^*)^M_{\text{single}}$．

$\Sigma^H = \{\alpha \in \Sigma;\ \alpha(H) = 0\}$ と置き，任意の $\alpha \in \Sigma^H$ と $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ に対して $\sigma^*(X_\alpha + \theta X_\alpha)\lambda_H = 0$ を示そう．$B(X_\alpha, \theta X_\alpha) = -\frac{1}{2|\alpha|^2}$ と仮定してよい．$Z = \sqrt{-1}X_\alpha + \sqrt{-1}\theta X_\alpha$, $\bar{s}_\alpha = \exp(\pi\sqrt{-1}Z)$ と置くと $\bar{s}_\alpha \in N_K(\mathfrak{a}) \cap K^H$ である．故に $\sigma^*(\bar{s}_\alpha)\lambda_H = \lambda_H$．一方補題 3.4 により $\sigma^*(Z)(\sigma^*(Z)^2 - 1)\lambda_H = 0$ なので $\sigma^*(Z)$ の固有値 $0, 1, -1$ の固有ベクトルへの分解

$$\lambda_H = \lambda_H^{(0)} + \lambda_H^{(+)} + \lambda_H^{(-)}$$

が可能である．すると，

$$\sigma^*(\bar{s}_\alpha)\lambda_H = \lambda_H^{(0)} + e^{\pi\sqrt{-1}}\lambda_H^{(+)} + e^{-\pi\sqrt{-1}}\lambda_H^{(-)} = \lambda_H^{(0)} - (\lambda_H^{(+)} + \lambda_H^{(-)})$$

より $\lambda_H = \lambda_H^{(0)}$ となり，$\sigma^*(Z)\lambda_H = 0$ が得られる．従って

$$\sigma^*(X)\lambda_H = 0 \qquad \forall X \in \mathfrak{k}^H := \mathfrak{m} + \sum\{\mathbb{R}(X_\alpha + \theta X_\alpha);\ \alpha \in \Sigma^H, X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha\}$$

が示された．$\mathfrak{k}^H$ の解析的部分群を $(K^H)_0$ とすると，典型的な議論により

$$K^H = (N_K(\mathfrak{a}) \cap K^H) \cdot (K^H)_0$$

となるが，これは λ^H の K^H-不変性，従って (3.6) を導く． □

補題 3.7. $\mathfrak{p}$ の通常の位相は $q(k, H) = \mathrm{Ad}(k)H$ で定まる全射 $q : K \times \mathfrak{a} \to \mathfrak{p}$ による商位相と一致する．

証明. Killing 形式 $B(\cdot,\cdot)$ の $\mathfrak{p}$ への制限は K-不変な内積を定めるので，正の実数 R に対して

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}_R &= \{H \in \mathfrak{a};\ B(H, H) \le R\}, \\
\mathfrak{p}_R &= \{X \in \mathfrak{p};\ B(X, X) \le R\},
\end{aligned}$$

と置くと，任意の閉集合 $S \subset K \times \mathfrak{a}$ に対して $q(S \cap (K \times \mathfrak{a}_R)) = q(S) \cap \mathfrak{p}_R$ である．ここで $S \cap (K \times \mathfrak{a}_R)$ はコンパクトであるから $q(S) \cap \mathfrak{p}_R$ も $\mathfrak{p}$ の通常の位相に関してコンパクトである．これは $q(S)$ が $\mathfrak{p}$ の通常の位相に関して閉であることを示す． □

補題 3.6 と補題 3.7 から，各 $v \in V$ について Φ_v が $\mathfrak{p}$ 上の連続函数 $\Phi[v]$ を導くことが分かる．明らかに対応 $\Phi : v \mapsto \Phi[v]$ は K-作用と可換で関係式 (3.4) を満足する．故に Φ は $\Gamma_0^\sigma(\Phi) = \varphi$ であるような $\mathrm{Hom}_K(V, \mathscr{C}(\mathfrak{p}))$ の唯一の要素である．

定理 3.5 を $\mathscr{F} = \mathscr{C}^\infty$ に対して示すには更に準備が必要である．

定義 3.8. $\mathbf{k} : \Sigma \to \mathbb{C}$ を重複度函数，つまり各 W-軌道上同じ値をとる函数とする．各 $\xi \in \mathfrak{a}$ に対して函数 $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathfrak{a})$ または $\mathscr{D}(\mathfrak{a})$（コンパクト台の無限回連続微分可能な函数）に作用する微分差分作用素 $\mathscr{T}_{\mathbf{k}}(\xi)$ を

$$\mathscr{T}_{\mathbf{k}}(\xi)f(H) = \partial(\xi)f(H) + \sum_{\alpha\in\Sigma^+} \mathbf{k}(\alpha)\,\alpha(\xi)\,\frac{f(H) - f(s_\alpha H)}{\alpha(H)}, \tag{3.7}$$

で定める．ここで $\partial(\xi)$ は ξ-方向への偏微分作用素で $s_\alpha \in W$ は α が定める鏡映である．

注意 3.9. (3.7) の結果は同じ函数クラス（$\mathscr{C}^\infty$ または $\mathscr{D}$）に属する．また，各 $w \in W$ について $w\mathscr{T}_{\mathbf{k}}(\xi) = \mathscr{T}_{\mathbf{k}}(w\xi)w$ が成り立つ．$\mathscr{T}_{\mathbf{k}}(\xi)$ は [Du1] で導入された有理型 Dunkl 作用素と呼ばれるもので，任意の $\xi, \eta \in \mathfrak{a}$ に対し $\mathscr{T}_{\mathbf{k}}(\xi)\mathscr{T}_{\mathbf{k}}(\eta) = \mathscr{T}_{\mathbf{k}}(\eta)\mathscr{T}_{\mathbf{k}}(\xi)$ が成り立つ．この節では $\mathbf{k}(\alpha) = \frac{\dim \mathfrak{g}_\alpha}{2}$ の場合しか扱わないので添字 $\mathbf{k}$ を $\mathscr{T}_{\mathbf{k}}$ から省く．

補題 3.10. $L_{\mathfrak{p}}$ を Euclid 空間 $\mathfrak{p}$ 上の Laplace 作用素とする．$\{\xi_1, \ldots, \xi_\ell\}$ を $\mathfrak{a}$ の正規直交基底とし，$\mathscr{L}_{\mathfrak{a}} = \sum_{i=1}^{\ell} \mathscr{T}(\xi_i)^2$ と置く．すると，$\Phi \in \mathrm{Hom}_K(V, \mathscr{C}^\infty(\mathfrak{p}))$，$v \in V^M_{\mathrm{single}}$ に対して

$$(L_{\mathfrak{p}}\Phi[v])\big|_{\mathfrak{a}} = \mathscr{L}_{\mathfrak{a}}(\Phi[v]\big|_{\mathfrak{a}}).$$

証明. $X \in \mathfrak{p}$ と $Y \in \mathfrak{k}$ に対して

$$\begin{aligned}\Phi[\sigma(Y)v](X) &= \frac{d}{dt}\Phi[\sigma(\exp tY)v](X)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\Phi[v](\mathrm{Ad}(\exp -tY)X)\Big|_{t=0} = \partial([X,Y])\Phi[v](X)\end{aligned} \tag{3.8}$$

である．従って $H \in \mathfrak{a}, \alpha \in \Sigma$ と $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ に対して

$$\begin{aligned}\Phi[\sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)^2 v](H) &= \partial([H, X_\alpha + \theta X_\alpha])\Phi[\sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)v](H) \\ &= \alpha(H)\partial(X_\alpha - \theta X_\alpha)\Phi[\sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)v](H) \\ &= \alpha(H)\frac{d}{dt}\Phi[\sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)v](H + t(X_\alpha - \theta X_\alpha))\Big|_{t=0} \\ &= \alpha(H)\frac{d}{dt}\partial([H + t(X_\alpha - \theta X_\alpha), X_\alpha + \theta X_\alpha])\Phi[v](H + t(X_\alpha - \theta X_\alpha))\Big|_{t=0} \\ &= \alpha(H)^2\frac{d}{dt}\partial(X_\alpha - \theta X_\alpha)\Phi[v](H + t(X_\alpha - \theta X_\alpha))\Big|_{t=0} \\ &\quad + \alpha(H)\frac{d}{dt}2t\partial([X_\alpha, \theta X_\alpha])\Phi[v](H + t(X_\alpha - \theta X_\alpha))\Big|_{t=0} \\ &= \alpha(H)^2\partial(X_\alpha - \theta X_\alpha)^2\Phi[v](H) + 2\alpha(H)\partial([X_\alpha, \theta X_\alpha])\Phi[v](H) \\ &= \alpha(H)^2\partial(X_\alpha - \theta X_\alpha)^2\Phi[v](H) + 2\alpha(H)B(X_\alpha, \theta X_\alpha)\partial(H_\alpha)\Phi[v](H).\end{aligned} \tag{3.9}$$

次に

$$v = v^{(0)} + v^{(+)} + v^{(-)}$$

を $\sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)$ の固有値 $0, \pm|\alpha|\sqrt{2B(X_\alpha, \theta X_\alpha)}$ の固有ベクトルへの分解とする（補題 3.4 よりこれら以外の固有値はない）．このとき $v - s_\alpha v = 2(v^{(+)} + v^{(-)})$ であり（補題 3.7 の証明を参照），

$$\begin{aligned}\sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)^2 v &= \sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)^2(v^{(+)} + v^{(-)}) \\ &= 2|\alpha|^2 B(X_\alpha, \theta X_\alpha)(v^{(+)} + v^{(-)}) = |\alpha|^2 B(X_\alpha, \theta X_\alpha)(1 - s_\alpha)v\end{aligned} \tag{3.10}$$

となる．(3.9) と (3.10) から

$$\frac{\partial(X_\alpha - \theta X_\alpha)^2}{-2B(X_\alpha, \theta X_\alpha)}\Phi[v](H) = \frac{1}{\alpha(H)}\partial(H_\alpha)\Phi[v](H) - |\alpha|^2\frac{\Phi[v](H) - \Phi[v](s_\alpha H)}{2\alpha(H)^2}$$

であり，

$$\begin{aligned}L_{\mathfrak{p}}\Phi[v](H) &= \sum_{i=1}^{\ell}\partial(\xi_i)^2\Phi[v](H) \\ &\quad + \sum_{\alpha\in\Sigma^+}\frac{\dim \mathfrak{g}_\alpha}{2}\left(\frac{2}{\alpha(H)}\partial(H_\alpha)\Phi[v](H) - |\alpha|^2\frac{\Phi[v](H) - \Phi[v](s_\alpha H)}{\alpha(H)^2}\right)\end{aligned}$$

となるが，これは [Du1, Theorem 1.10] により $\sum_{i=1}^{\ell}\mathscr{T}(\xi_i)^2\Phi[v](H)$ に等しい． □

補題 3.11. 正の定数 $C_{\mathfrak{a}}$ があって任意のコンパクトな台を持つ K-不変な $F(X) \in \mathscr{C}(\mathfrak{p})$ に対して

$$\int_{\mathfrak{p}} F(X)\,dX = C_{\mathfrak{a}} \int_{\mathfrak{a}} F(H) \prod_{\alpha\in\Sigma^+} \left|\alpha(H)\right|^{\dim \mathfrak{g}_\alpha} dH.$$

証明. [He2, Chapter I, Theorem 5.17] を参照. □

補題 3.12. 各 $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathfrak{a})$, $f \in \mathscr{D}(\mathfrak{a})$, $\xi \in \mathfrak{a}$ に対して

$$\int_{\mathfrak{a}} (\mathscr{T}(\xi)\varphi)(H) f(H) \prod_{\alpha\in\Sigma^+} \left|\alpha(H)\right|^{\dim \mathfrak{g}_\alpha} dH = -\int_{\mathfrak{a}} \varphi(H)(\mathscr{T}(\xi)f)(H) \prod_{\alpha\in\Sigma^+} \left|\alpha(H)\right|^{\dim \mathfrak{g}_\alpha} dH.$$

証明. 直接計算による（[Du2, Lemma 2.9] 参照）. □

補題 3.13. (3.2) の分解を思い出そう. $\{v_1,\dots,v_n\}$ を V の基で, $\{v_1,\dots,v_{m'}\}, \{v_{m'+1},\dots,v_m\}, \{v_{m+1},\dots,v_n\}$ がそれぞれ V^M_{single}, V^M_{double}, $\sum_{\tau\neq\mathrm{triv}} V^\tau$ の基となっているものとする. このとき $\{v_1^*,\dots,v_n^*\}$ を $\{v_1,\dots,v_n\}$ の双対基とすると, $\{v_1^*,\dots,v_{m'}^*\}, \{v_{m'+1}^*,\dots,v_m^*\}, \{v_{m+1}^*,\dots,v_n^*\}$ はそれぞれ $(V^*)^M_{\mathrm{single}}$, $(V^*)^M_{\mathrm{double}}$, $\sum_{\tau\neq\mathrm{triv}}(V^*)^\tau$ の基となる.

証明. $(\cdot,\cdot)$ を $V^*\times V$ 上の標準的な双一次形式とする. $\tau = \mu^*$ でない限り $((V^*)^\tau, V^\mu) = 0$ であるから

$$V^M_{\mathrm{single}} = \{v \in V^M;\ (v^*, v) = 0 \quad \forall v^* \in (V^*)^M_{\mathrm{double}}\},$$
$$(V^*)^M_{\mathrm{single}} = \{v^* \in (V^*)^M;\ (v^*, v) = 0 \quad \forall v \in V^M_{\mathrm{double}}\}$$

をいえばよい. これは補題 3.3 と全く同様にできる. □

以上の準備のもと, $\varphi \in \mathrm{Hom}_W(V^M/V^M_{\mathrm{double}}, \mathscr{C}^\infty(\mathfrak{a}))$ とする. $\varphi^\sim$ で $\Gamma_0^\sigma(\varphi^\sim) = \varphi$ を満たす $\mathrm{Hom}_K(V, \mathscr{C}(\mathfrak{p}))$ の唯一の要素を表すことにする. 注意 3.9 により写像

$$V^M \ni v \mapsto \mathscr{L}_{\mathfrak{a}}\varphi[v] \in \mathscr{C}^\infty(\mathfrak{a}) \tag{3.11}$$

は $\mathrm{Hom}_W(V^M/V^M_{\mathrm{double}}, \mathscr{C}^\infty(\mathfrak{a}))$ に属する. 写像 (3.11) を $\mathscr{L}_{\mathfrak{a}}\varphi$ と記して

$$L_{\mathfrak{p}}\varphi^\sim[v] = (\mathscr{L}_{\mathfrak{a}}\varphi)^\sim[v] \qquad \forall v \in V \tag{3.12}$$

を示そう. この左辺では $\varphi^\sim[v] \in \mathscr{D}'(\mathfrak{p})$（分布函数）と見做して $L_{\mathfrak{p}}$ を施している. 一方右辺は連続函数であることが示されているので, もしも (3.12) が成り立てばこれと Weyl の補題を繰り返し用いて $\varphi^\sim[v] \in \mathscr{C}^\infty(\mathfrak{p})$ が結論できる.

$\{v_1,\dots,v_n\}$ を補題 3.13 のような V の基とし, $\{v_1^*,\dots,v_n^*\}$ をその双対基とする. 勝手な n 個の試験函数 $F_1,\dots,F_n \in \mathscr{D}(\mathfrak{p})$ について

$$\sum_{i=1}^n \int_{\mathfrak{p}} \varphi^\sim[v_i]\,(L_{\mathfrak{p}}F_i)\,dX = \sum_{i=1}^n \int_{\mathfrak{p}} (\mathscr{L}_{\mathfrak{a}}\varphi)^\sim[v_i] F_i\,dX. \tag{3.13}$$

をいえばよい. そのために, $v_i^* \mapsto F_i$ $(i = 1,\dots,n)$ で定まる線型写像 $F: V^* \to \mathscr{D}(\mathfrak{p})$ を用いて

$$\bar{F}: V^* \ni v^* \mapsto \int_K F[\sigma^*(k)v^*](\mathrm{Ad}(k)X)\,dk \in \mathscr{D}(\mathfrak{p})$$

と置く．ここで dk は規格化された K の不変測度である．$\bar{F} \in \mathrm{Hom}_K(V^*, \mathscr{C}^\infty(\mathfrak{p}))$ であり，(3.13) の左辺は

$$
\begin{aligned}
&\int_K \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathfrak{p}} \varphi^{\sim}[\sigma(k)v_i](X)\,(L_{\mathfrak{p}}F[\sigma^*(k)v_i^*])\,(X)\,dX\,dk \\
&\quad = \sum_{i=1}^{n} \int_K \int_{\mathfrak{p}} \varphi^{\sim}[v_i](\mathrm{Ad}(k^{-1})X)\,(L_{\mathfrak{p}}F[\sigma^*(k)v_i^*])\,(X)\,dX\,dk \\
&\quad = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathfrak{p}} \varphi^{\sim}[v_i](X) \int_K (L_{\mathfrak{p}}F[\sigma^*(k)v_i^*])\,(\mathrm{Ad}(k)X)\,dk\,dX \\
&\quad = \int_{\mathfrak{p}} \sum_{i=1}^{n} \varphi^{\sim}[v_i](X)\left(L_{\mathfrak{p}}\bar{F}[v_i^*]\right)(X)\,dX \\
&\quad = C_{\mathfrak{a}} \int_{\mathfrak{a}} \sum_{i=1}^{n} \varphi^{\sim}[v_i](H)\left(L_{\mathfrak{p}}\bar{F}[v_i^*]\right)(H) \prod_{\alpha\in\Sigma^+} |\alpha(H)|^{\dim \mathfrak{g}_\alpha}\,dH \\
&\quad = C_{\mathfrak{a}} \int_{\mathfrak{a}} \sum_{i=1}^{m'} \varphi[v_i](H)\left(L_{\mathfrak{p}}\bar{F}[v_i^*]\right)(H) \prod_{\alpha\in\Sigma^+} |\alpha(H)|^{\dim \mathfrak{g}_\alpha}\,dH
\end{aligned} \tag{3.14}
$$

と変形できる．4 番目の等式は被積分函数の K-不変性と補題 3.11 による．最後の等式は $\varphi^{\sim}[v_i]\big|_{\mathfrak{a}} = 0$ ($i = m'+1, \ldots, n$) という事実に基づいている（命題 3.1 の証明を参照）．同様に (3.13) の右辺を

$$
C_{\mathfrak{a}} \int_{\mathfrak{a}} \sum_{i=1}^{m'} (\mathscr{L}_{\mathfrak{a}}\varphi)[v_i](H)\bar{F}[v_i^*](H) \prod_{\alpha\in\Sigma^+} |\alpha(H)|^{\dim \mathfrak{g}_\alpha}\,dH
$$

へ変形できるが，これは (3.14) の最後の式に等しい．何故なら，補題 3.12 と補題 3.10 により

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathfrak{a}} (\mathscr{L}_{\mathfrak{a}}\varphi)[v_i](H)\bar{F}[v_i^*](H) \prod_{\alpha\in\Sigma^+} |\alpha(H)|^{\dim \mathfrak{g}_\alpha}\,dH &= \int_{\mathfrak{a}} \varphi[v_i](H)\mathscr{L}_{\mathfrak{a}}(\bar{F}[v_i^*]|_{\mathfrak{a}})(H) \prod_{\alpha\in\Sigma^+} |\alpha(H)|^{\dim \mathfrak{g}_\alpha}\,dH \\
&= \int_{\mathfrak{a}} \varphi[v_i](H)\left(L_{\mathfrak{p}}\bar{F}[v_i^*]\right)(H) \prod_{\alpha\in\Sigma^+} |\alpha(H)|^{\dim \mathfrak{g}_\alpha}\,dH
\end{aligned}
$$

が成り立つからである．従って $\mathscr{F} = \mathscr{C}^\infty$ に対する定理 3.5 が証明された．

最後に $\mathscr{F} = \mathscr{P}$ に対する定理 3.5 を示すために $\varphi \in \mathrm{Hom}_W(V^M/V^M_{\mathrm{double}}, \mathscr{P}(\mathfrak{a}))$，$\Phi = \varphi^{\sim}$ とする．各 $v \in V$ について $\Phi[v] \in \mathscr{P}(\mathfrak{p})$ を示すのであるが，$\varphi[v]$ は全て同じ次数 j を持つ同次多項式としてよい．すると，(3.5) と関係式 $\Phi[v](\mathrm{Ad}(k)H) = \Phi_v(k, H)$ ($k \in K$, $H \in \mathfrak{a}$) から $\Phi[v]$ も全て次数 j の同次函数であることが分かる．0 のまわりで定義された同次 $\mathscr{C}^\infty$ 函数は多項式しかないので主張は正しい．以上で定理 3.5 の証明を終えた．

注意 3.14. 定理 3.5 の証明において，補題 3.4 を示す部分にだけ §2 の結果を用いた．従って V^M_{single}，V^M_{double} の定義として定義 3.2 の代わりに

$$
\begin{aligned}
V^M_{\mathrm{single}} &= \left\{ v \in V^M;\ \sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)(\sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)^2 - 2|\alpha|^2 B(X_\alpha, \theta X_\alpha))v = 0 \quad \forall\alpha \in \Sigma,\ \forall X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \right\}, \\
V^M_{\mathrm{double}} &= V^M \cap \sum \left\{ \sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)(\sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)^2 - 2|\alpha|^2 B(X_\alpha, \theta X_\alpha))V;\ \alpha \in \Sigma,\ X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \right\}
\end{aligned}
$$

を用いれば（補題 3.4 よりこれは同値な定義），定理 3.5 を導くのに前章の結果は必要ない．

定理 1.3 の証明を完成させるには，次がいえればよい．

定理 3.15. $V' \subset V^M$ を W-部分加群とすると，$\Gamma_0^\pi(\mathrm{Hom}_K(V, S(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}))) \supset \mathrm{Hom}_W(V^M/V', S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}))$ であるためには $V' \supset V^M_{\mathrm{double}}$ であることが必要十分である．

十分性は定理 3.5 で既に示したので必要性をいえばよい.

$S(\mathfrak{a}_\mathbb{C}) \simeq \mathscr{P}(\mathfrak{a})$ の要素で全ての $f \in S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})^W \cap S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})\mathfrak{a}_\mathbb{C}$ に対する $\partial(f)$ で消えるものを $\mathfrak{a}$ 上の W-調和多項式と呼び，その全体を $\mathscr{H}_W(\mathfrak{a})$ で表す．このとき

命題 3.16. 環の積で定義される自然な写像

$$S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})^W \otimes \mathscr{H}_W(\mathfrak{a}) \to S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$$

は W-加群の同型を与える．更に，W-加群として $\mathscr{H}_W(\mathfrak{a}) \simeq \mathbb{C}[W]$ である．従って

(3.15) $$\mathrm{Hom}_W(V^M, S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})) \simeq \mathscr{A} \otimes \mathrm{Hom}_W(V^M, \mathscr{H}_W(\mathfrak{a})) \simeq \mathscr{A}^{\oplus m(\sigma)} \qquad \text{ここで } m(\sigma) = \dim_\mathbb{C} V^M$$

が成り立つ.

証明. [He2, Chapter III,Theorem 3.4] 参照. □

定理 3.15 の必要性は次から従う：

補題 3.17. $\Phi \in \mathrm{Hom}_K(V, S(\mathfrak{p}_\mathbb{C}))$ は各 $v \in V^M$ に対して $\Gamma_0^\sigma(\Phi)[v] \in \mathscr{H}_W(\mathfrak{a})$ を満たすとする．このとき各 $v \in V^M_{\mathrm{double}}$ に対して $\Gamma_0^\sigma(\Phi)[v] = 0$.

証明. 補題 3.10 とその証明における設定を用いる．$L_\mathfrak{a} = \sum_{i=1}^{\ell} \partial(\xi_i)^2$ と置く．(3.8) と (3.9) は全ての $v \in V$ に対して成立することに注意すると，各 $v \in V, \alpha \in \Sigma_1, X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ について (3.9) と同様の計算により

$$\begin{aligned}
&\Phi[\sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)(\sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)^2 - 2|\alpha|^2 B(X_\alpha, \theta X_\alpha))v](H)\\
&= \alpha(H)^2 \partial(X_\alpha - \theta X_\alpha)^2 \Phi[\sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)v](H)\\
&\quad + 2\alpha(H)B(X_\alpha, \theta X_\alpha)\partial(H_\alpha)\Phi[\sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)v](H) - 2|\alpha|^2 B(X_\alpha, \theta X_\alpha)\Phi[\sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)v](H)\\
&= \alpha(H)^2 \partial(X_\alpha - \theta X_\alpha)^2 \Phi[\sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)v](H)\\
&\qquad + 2\alpha(H)B(X_\alpha, \theta X_\alpha)\left.\frac{d}{dt}\Phi[\sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)v](H + tH_\alpha)\right|_{t=0}\\
&\qquad\quad - 2\alpha(H)|\alpha|^2 B(X_\alpha, \theta X_\alpha)\partial(X_\alpha - \theta X_\alpha)\Phi[v](H)\\
&= \alpha(H)^2 \partial(X_\alpha - \theta X_\alpha)^2 \Phi[\sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)v](H)\\
&\qquad + 2\alpha(H)B(X_\alpha, \theta X_\alpha)\Big(|\alpha|^2 \partial(X_\alpha - \theta X_\alpha)\Phi[v](H) + \alpha(H)\partial(H_\alpha)\partial(X_\alpha - \theta X_\alpha)\Phi[v](H)\Big)\\
&\qquad\quad - 2\alpha(H)|\alpha|^2 B(X_\alpha, \theta X_\alpha)\partial(X_\alpha - \theta X_\alpha)\Phi[v](H)\\
&= \alpha(H)^2 \Big(\partial(X_\alpha - \theta X_\alpha)^2 \Phi[\sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)v](H) + 2B(X_\alpha, \theta X_\alpha)\partial(H_\alpha)\partial(X_\alpha - \theta X_\alpha)\Phi[v](H)\Big)
\end{aligned}$$

が成り立つ．これは

$$\begin{aligned}
&\Phi[\sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)(\sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)^2 - 2|\alpha|^2 B(X_\alpha, \theta X_\alpha))v]\big|_\mathfrak{a}\\
&\qquad = \Phi[p^\sigma\big(\sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)(\sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)^2 - 2|\alpha|^2 B(X_\alpha, \theta X_\alpha))v\big)]\big|_\mathfrak{a} \in \alpha^2 \mathscr{P}(\mathfrak{a})
\end{aligned}$$

を示す．0 以外の $\alpha^2\mathscr{P}(\mathfrak{a})$ のどの要素も $L_\mathfrak{a}$ で消されないので

$$\Gamma_0^\sigma(\Phi)[p^\sigma\big(\sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)(\sigma(X_\alpha + \theta X_\alpha)^2 - 2|\alpha|^2 B(X_\alpha, \theta X_\alpha))v\big)] = 0$$

を得る. □

この節の最後に K-タイプの新しいクラスを導入する：

定義 3.18. K-タイプ (σ, V) が quasi-single-petaled であるとは，$V^M_{\mathrm{single}} \neq 0$ であるときをいう.

命題 3.19. quasi-single-petaled K-タイプは有限個.

証明. (σ, V) は quasi-single-petaled とすると定理 3.5 により自明でない $\varphi \in \mathrm{Hom}_W(V^M, \mathscr{H}_W(\mathfrak{a}))$ に対して $\Gamma_0^\sigma(\Phi) = \varphi$ となる $\Phi \in \mathrm{Hom}_K(V, S(\mathfrak{p}_\mathbb{C}))$ が存在する. W-調和多項式 φ の次数は W 内の鏡映の数（r とする）を超えないので（[He2, Chapter III,Theorem 3.6]），また Γ_0^σ は同次性を保つので，各 $v \in V$ について $\Phi[v]$ の次数は r を超えない. 従って Φ は V から有限次元表現 $\{F \in S(\mathfrak{p}_\mathbb{C}); \deg F \leq r\}$ のいずれかの既約成分への同型を与える. □

4 Harish-Chandra 準同型

この節では定理 1.4 の証明を行う. まず退化 Hecke 環の定義から始める. これは本質的に [Lu] で与えられた.

定義 4.1. $\mathbf{k} : \Sigma_1 \to \mathbb{C}$ を重複度函数とすると，$\mathbb{C}$ 上の代数 $\mathbf{H_k}$ で以下を満たすものが唯一存在する：

(i) $\mathbb{C}$-線型空間として $\mathbf{H_k} \simeq S(\mathfrak{a}_\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[W]$.

(ii) 写像 $S(\mathfrak{a}_\mathbb{C}) \to \mathbf{H_k}, f \mapsto f \otimes 1$ と写像 $\mathbb{C}[W] \to \mathbf{H_k}, w \mapsto 1 \otimes w$ は環準同型である.

(iii) 任意の $f \in S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$ と $w \in W$ に対して $(f \otimes 1) \cdot (1 \otimes w) = f \otimes w$ である.

(iv) 任意の $\alpha \in \Pi$ と $\xi \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}$ に対して $(1 \otimes s_\alpha) \cdot (\xi \otimes 1) = s_\alpha(\xi) \otimes s_\alpha - \mathbf{k}(\alpha)\,\alpha(\xi)$ である.

$\mathbf{H_k}$ を $(\mathfrak{a}_\mathbb{C}, \Pi, \mathbf{k})$ に関連した退化 Hecke 環と呼ぶ.

注意 4.2. (ii) により $S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$ や $\mathbb{C}[W]$ を $\mathbf{H_k}$ の部分環と見做す. すると (iv) は簡単に

$$s_\alpha \cdot \xi = s_\alpha(\xi) \cdot s_\alpha - \mathbf{k}(\alpha)\,\alpha(\xi) \qquad \forall \alpha \in \Pi\ \forall \xi \in \mathfrak{a}_\mathbb{C} \tag{4.1}$$

と書ける. §1 で述べたように $\mathbf{H_k}$ の中心は $S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})^W$ に等しい（[Lu], [Ch], [Op]）. 以降

$$\mathbf{k}(\alpha) = \dim \mathfrak{g}_\alpha + 2 \dim \mathfrak{g}_{2\alpha} \tag{4.2}$$

とし，添字 $\mathbf{k}$ を $\mathbf{H_k}$ から省く. $\mathbf{H}$ はデータ $(\mathfrak{n}, \mathfrak{a})$ のみから定まることに注意する.

左 $\mathbf{H}$-加群 $S_\mathbf{H}(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$ を §1 のように (1.9) で定める.

補題 4.3. $\alpha \in \Pi$，$\alpha^\vee = \frac{2H_\alpha}{|\alpha|^2}$，$\mathfrak{a}(\alpha) = \{H \in \mathfrak{a}; \alpha(H) = 0\}$ とすると，

$$S_\mathbf{H}(\mathfrak{a}_\mathbb{C}) = S(\mathfrak{a}(\alpha)_\mathbb{C}) \cdot \mathbb{C}[(\alpha^\vee)^2] \oplus S(\mathfrak{a}(\alpha)_\mathbb{C}) \cdot \mathbb{C}[(\alpha^\vee)^2](\alpha^\vee + \dim \mathfrak{g}_\alpha + 2 \dim \mathfrak{g}_{2\alpha})$$

は $S_\mathbf{H}(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$ へ作用する $s_\alpha \in \mathbf{H}$ に対する固有値 $+1, -1$ の固有空間分解である.

証明. (4.1) により

$$s_\alpha(\alpha^\vee + \mathbf{k}(\alpha)) = -\alpha^\vee s_\alpha - \mathbf{k}(\alpha) \cdot 2 + \mathbf{k}(\alpha)\, s_\alpha \equiv -(\alpha^\vee + \mathbf{k}(\alpha)) \mod \sum_{w \in W \setminus \{1\}} \mathbf{H}(w-1).$$

同様に $s_\alpha \cdot (\alpha^\vee)^2 = (\alpha^\vee)^2 \cdot s_\alpha$，$\xi \in \mathfrak{a}(\alpha)$ に対して $s_\alpha \cdot \xi = \xi \cdot s_\alpha$ が示される. □

系 4.4. $S_\mathbf{H}(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$ の W-不変部分空間は自然な同一視 $S_\mathbf{H}(\mathfrak{a}_\mathbb{C}) \simeq S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$（§1 参照）のもと $S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})^W$ と一致する.

quasi-spherical K-タイプ (σ, V) に対し §1 の写像 Γ^σ を考察する．(1.3) により

$$\mathrm{Hom}_K(V, U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})) = \mathrm{Hom}_K(V, \mathrm{symm}(S(\mathfrak{p}_\mathbb{C}))) \oplus \mathrm{Hom}_K(V, U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})\mathfrak{k}_\mathbb{C}).$$

である．また，$\{U_d(\mathfrak{g}_\mathbb{C})\}_{d=0}^\infty$ を $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ の標準的なフィルター付け，$\{S^d(\mathfrak{p}_\mathbb{C})\}_{d=0}^\infty$，$\{S^d(\mathfrak{a}_\mathbb{C})\}_{d=0}^\infty$ を $S(\mathfrak{p}_\mathbb{C})$，$S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$ の標準的な次数付けとすると，

$$\gamma \circ \mathrm{symm}(F) - \gamma_0(F) \in \sum_{i=0}^{d-1} S^i(\mathfrak{a}_\mathbb{C}) \qquad \forall F \in S^d(\mathfrak{p}_\mathbb{C}) \tag{4.3}$$

となる．従って命題 3.1 の系として次が完全となる：

$$0 \to \mathrm{Hom}_K(V, U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})\mathfrak{k}_\mathbb{C}) \to \mathrm{Hom}_K(V, U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})) \xrightarrow{\Gamma^\sigma} \mathrm{Hom}_\mathbb{C}(V^M, S_\mathbb{H}(\mathfrak{a}_\mathbb{C})). \tag{4.4}$$

定理 1.4 の第 2 の主張の十分性は次による：

定理 4.5. $\nu \in V^M_{\mathrm{single}}$ とする．任意の $\Psi \in \mathrm{Hom}_K(V, U(\mathfrak{g}_\mathbb{C}))$ および $w \in W$ に対して

$$\Gamma^\sigma(\Psi)[wv] = w\Gamma^\sigma(\Psi)[v] \tag{4.5}$$

が成り立つ．ここで右辺の w は $S_\mathbb{H}(\mathfrak{a}_\mathbb{C})$ の要素への作用をしているとする．

証明. $v \in V^M_{\mathrm{single}}$ とする．各単純ルート $\alpha \in \Pi$ に対して補題 3.4 の証明と同様に $\mathfrak{g}(\alpha)$，$\mathfrak{g}_{ss}(\alpha)$，$\mathfrak{k}_{ss}(\alpha)$，$G_{ss}(\alpha)$，$K_{ss}(\alpha)$，$M_{ss}(\alpha)$ を定める．更に

$$\mathfrak{z}(\alpha) = \mathfrak{g}(\alpha) \text{ の中心}, \quad \mathfrak{n}_\alpha = \sum_{\beta \in \Sigma^+ \setminus \mathbf{Z}\alpha} \mathfrak{g}_\beta, \quad \mathfrak{t}_\alpha = \sum \{\mathbb{R}(X_\beta + \theta X_\beta); \beta \in \Sigma \setminus \mathbf{Z}\alpha, X_\beta \in \mathfrak{g}_\beta\}.$$

と置き，射影

$$\gamma_\alpha : U(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) = ((\mathfrak{n}_\alpha)_\mathbb{C} U(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) + U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})(\mathfrak{t}_\alpha)_\mathbb{C} + U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})\mathfrak{z}(\alpha)_\mathbb{C}) \oplus U(\mathfrak{a}(\alpha)_\mathbb{C} + \mathfrak{g}_{ss}(\alpha)_\mathbb{C}) \to U(\mathfrak{a}(\alpha)_\mathbb{C} + \mathfrak{g}_{ss}(\alpha)_\mathbb{C})$$

を定めるとこれは $K_{ss}(\alpha)$-準同型で，$\gamma \circ \gamma_\alpha = \gamma$ が成り立つ．$U(\mathfrak{k}_{ss}(\alpha)_\mathbb{C})v$ を既約 $K_{ss}(\alpha)$-加群の直和 $V^{(1)} \oplus \cdots \oplus V^{(t)}$ に分解して $v = v^{(1)} + \cdots + v^{(t)}$ を対応する分解とする．$X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ を $B(X_\alpha, \theta X_\alpha) = -\frac{1}{2|\alpha|^2}$ となるように選んで固定し $Z = \sqrt{-1}X_\alpha + \sqrt{-1}\theta X_\alpha$ と置くと，$Z(Z^2-1)v = Z(Z^2-1)v^{(1)} + \cdots + Z(Z^2-1)v^{(t)} = 0$ より各 $s = 1, \ldots, t$ について $Z(Z^2-1)v^{(s)} = 0$ を得る．$v^{(s)}$ は $V^{(s)}$ の $M_{ss}(\alpha)$-不変なベクトルなので $V^{(s)}$ は single-petaled $K_{ss}(\alpha)$-タイプである．$\mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}_{ss}(\alpha)$ 上の $K_{ss}(\alpha)$-調和多項式の空間を $\mathscr{H}_\alpha$ とし，$\Psi^{(s)} \in \mathrm{Hom}_{K_{ss}(\alpha)}(V^{(s)}, \mathrm{symm}(\mathscr{H}_\alpha)) \setminus \{0\}$ を 1 つ固定する．また，$S_\alpha = \mathrm{symm}(S(\mathfrak{p}_\mathbb{C} \cap \mathfrak{g}_{ss}(\alpha)_\mathbb{C})^{K_{ss}(\alpha)})$ とする．$\mathrm{Hom}_{K_{ss}(\alpha)}(V^{(s)}, U(\mathfrak{a}(\alpha)_\mathbb{C} + \mathfrak{g}_{ss}(\alpha)_\mathbb{C}))$ の要素 Ψ_s を

$$V^{(s)} \hookrightarrow V \xrightarrow{\Psi} U(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) \xrightarrow{\gamma_\alpha} U(\mathfrak{a}(\alpha)_\mathbb{C} + \mathfrak{g}_{ss}(\alpha)_\mathbb{C})$$

により定めると，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{K_{ss}(\alpha)}(V^{(s)}, U(\mathfrak{a}(\alpha)_\mathbb{C} + \mathfrak{g}_{ss}(\alpha)_\mathbb{C})) \simeq \mathrm{Hom}_{K_{ss}(\alpha)}(V^{(s)}, U(\mathfrak{g}_{ss}(\alpha)_\mathbb{C})) \otimes S(\mathfrak{a}(\alpha)_\mathbb{C}),\\
&\mathrm{Hom}_{K_{ss}(\alpha)}(V^{(s)}, U(\mathfrak{g}_{ss}(\alpha)_\mathbb{C})) \simeq \mathrm{Hom}_{K_{ss}(\alpha)}(V^{(s)}, U(\mathfrak{g}_{ss}(\alpha)_\mathbb{C})\mathfrak{k}_{ss}(\alpha)_\mathbb{C}) \oplus \mathrm{Hom}_{K_{ss}(\alpha)}(V^{(s)}, \mathrm{symm}(\mathscr{H}_\alpha)) \otimes S_\alpha,\\
&\mathrm{Hom}_{K_{ss}(\alpha)}(V^{(s)}, \mathrm{symm}(\mathscr{H}_\alpha)) = \mathbb{C}\Psi^{(s)}
\end{aligned}$$

であるので，適当に $f_1, \ldots, f_j \in S(\mathfrak{a}(\alpha)_\mathbb{C})$ および $D_1, \ldots, D_j \in S_\alpha$ を選んで $\Psi_s - \Psi^{(s)}(D_1 f_1 + \cdots + D_j f_j) \in \mathrm{Hom}_{K_{ss}(\alpha)}(V^{(s)}, U(\mathfrak{a}(\alpha)_\mathbb{C} + \mathfrak{g}_{ss}(\alpha)_\mathbb{C})\mathfrak{k}_{ss}(\alpha)_\mathbb{C})$ とできる．このとき写像 $p^\sigma : V \to V^M$ を命題 3.1 の証明におけるものとすると，

$$\begin{aligned}
&\Gamma^\sigma(\Psi)[p^\sigma(v^{(s)})] = \gamma\left(\Psi_s[v^{(s)}]\right) = \gamma\left(\Psi^{(s)}[v^{(s)}]\right) \cdot (\gamma(D_1)f_1 + \cdots + \gamma(D_j)f_j),\\
&\gamma(D_1)f_1 + \cdots + \gamma(D_j)f_j \in S(\mathfrak{a}(\alpha)_\mathbb{C}) \cdot \mathbb{C}[(\alpha^\vee)^2]
\end{aligned}$$

が分かる．$V^{(s)}$ $(s=1,\ldots,t)$ は自明な $K_{ss}(\alpha)$-タイプか $(\mathrm{Ad}, \mathfrak{p}_{\mathbf{C}}\cap\mathfrak{g}_{ss}(\alpha)_{\mathbf{C}})$ に現れる $K_{ss}(\alpha)$-タイプである．自明な $K_{ss}(\alpha)$-タイプの場合，$s_\alpha v^{(s)} = v^{(s)}$ であるが，補題 2.6 (iv), (v) より $\gamma\big(\Psi^{(s)}[v^{(s)}]\big)$ はスカラーである．この場合補題 4.3 により $s_\alpha\Gamma^\sigma(\Psi)[p^\sigma\big(v^{(s)}\big)] = \Gamma^\sigma(\Psi)[p^\sigma\big(v^{(s)}\big)]$ が成り立っている．反対に $(\mathrm{Ad}, \mathfrak{p}_{\mathbf{C}}\cap\mathfrak{g}_{ss}(\alpha)_{\mathbf{C}})$ に現れる $K_{ss}(\alpha)$-タイプの場合，補題 2.6 (iv), (v) より $\gamma\big(\Psi^{(s)}[v^{(s)}]\big)$ はスカラー倍を除いて $\alpha^\vee + \dim\mathfrak{g}_\alpha + 2\dim\mathfrak{g}_{2\alpha}$ に等しく，補題 4.3 により $s_\alpha\Gamma^\sigma(\Psi)[p^\sigma\big(v^{(s)}\big)] = -\Gamma^\sigma(\Psi)[p^\sigma\big(v^{(s)}\big)]$ となっている．また，定理 2.5 より $s_\alpha v^{(s)} = -v^{(s)}$ である．以上より $\Gamma^\sigma(\Psi)[p^\sigma\big(s_\alpha v^{(s)}\big)] = s_\alpha\Gamma^\sigma(\Psi)[p^\sigma\big(v^{(s)}\big)]$ がいずれの場合にも成り立ち $(s=1,\ldots,j)$，$\Gamma^\sigma(\Psi)[s_\alpha v] = \Gamma^\sigma(\Psi)[p^\sigma\big(s_\alpha v^{(1)} + \cdots + s_\alpha v^{(t)}\big)] = s_\alpha\Gamma^\sigma(\Psi)[v]$ がいえた．これが各 $\alpha\in\Pi$ でいえるので，任意の $w\in W$ に対して (4.5) が成り立つ． □

$\alpha\in\Pi$ とし，定理 4.5 の証明の記号を引き続き用いる．補題 2.6 (i) により各 quasi-spherical $K_{ss}(\alpha)$-タイプ (σ', V') に対して $\sigma'(Z)$ の最大値である整数 $e(\sigma')$ が定まる．$K_{ss}(\alpha)$-加群 $U(\mathfrak{k}_{ss}(\alpha)_{\mathbf{C}})V^M$ を既約分解すると全ての成分が quasi-spherical となる．何故なら，任意の $v\in V^M$ を既約分解に則して分解し，$v = v^{(1)} + v^{(2)} + \cdots$ とすると各 $v^{(s)}$ $(s=1,2,\ldots)$ が $M_{ss}(\alpha)$ で固定されるベクトルだからである．$K_{ss}(\alpha)$-加群の直和分解

$$U(\mathfrak{k}_{ss}(\alpha)_{\mathbf{C}})V^M = V_{[0]}\oplus V_{[1]}\oplus\cdots\oplus V_{[k]}$$

を考える．ここで，$V_{[s]}$ $(s=1,\ldots,k)$ は $|e(\sigma')| = s$ であるような $K_{ss}(\alpha)$-タイプ (σ', V') と同型な $K_{ss}(\alpha)$-既約部分加群の和であるとする．

補題 4.6. $p^\sigma\big(V_{[0]}^{M_{ss}(\alpha)}\big)\cap p^\sigma\big(V_{[1]}^{M_{ss}(\alpha)}\big) = 0$，$p^\sigma\big(V_{[2]}^{M_{ss}(\alpha)} + \cdots + V_{[k]}^{M_{ss}(\alpha)}\big)\subset V^M_{\mathrm{double}}$ である．更に

$$V^M_{\mathrm{double}} = \Big(V^M_{\mathrm{double}}\cap p^\sigma\big(V_{[0]}^{M_{ss}(\alpha)}\big)\oplus V^M_{\mathrm{double}}\cap p^\sigma\big(V_{[1]}^{M_{ss}(\alpha)}\big)\Big) + p^\sigma\big(V_{[2]}^{M_{ss}(\alpha)} + \cdots + V_{[k]}^{M_{ss}(\alpha)}\big) \tag{4.6}$$

が成り立つ．

証明．補題 2.6 (ii), (iii) と包含関係

$$V^M\subset V_{[0]}^{M_{ss}(\alpha)}\oplus V_{[1]}^{M_{ss}(\alpha)}\oplus\cdots\oplus V_{[k]}^{M_{ss}(\alpha)}$$

により，$V^M_{\mathrm{single}}\subset V_{[0]}^{M_{ss}(\alpha)}\oplus V_{[1]}^{M_{ss}(\alpha)}$．$(\cdot,\cdot)_V$ を V 上の K-不変 Hermite 内積とすると補題 3.3 の証明から V^M_{single} の V^M における直交補空間 $(V^M_{\mathrm{single}})^\perp$ は V^M_{double} に等しい．ここで

$$(V^M_{\mathrm{single}}, p^\sigma(V_{[2]} + \cdots + V_{[k]}))_V = (V^M_{\mathrm{single}}, V_{[2]} + \cdots + V_{[k]})_V\subset(V_{[0]} + V_{[1]}, V_{[2]} + \cdots + V_{[k]})_V = \{0\}$$

より $p^\sigma(V_{[2]} + \cdots + V_{[k]})\subset(V^M_{\mathrm{single}})^\perp = V^M_{\mathrm{double}}$．また，補題 2.6 (v) と定理 2.5 により s_α は $V_{[0]}^{M_{ss}(\alpha)}$，$V_{[1]}^{M_{ss}(\alpha)}$ にそれぞれ $+1$，-1 で作用するが，$p^\sigma : V\to V^M$ は W-準同型なので s_α は $p^\sigma\big(V_{[0]}^{M_{ss}(\alpha)}\big)$ と $p^\sigma\big(V_{[1]}^{M_{ss}(\alpha)}\big)$ にそれぞれ $+1$，-1 で作用する．従って $V^M_{\mathrm{double}}\cap p^\sigma(V_{[0]} + V_{[1]}) = V^M_{\mathrm{double}}\cap p^\sigma\big(V_{[0]}^{M_{ss}(\alpha)} + V_{[1]}^{M_{ss}(\alpha)}\big)$ の s_α に対する固有空間分解は，$V^M_{\mathrm{double}}\cap p^\sigma\big(V_{[0]}^{M_{ss}(\alpha)}\big)\oplus V^M_{\mathrm{double}}\cap p^\sigma\big(V_{[1]}^{M_{ss}(\alpha)}\big)$ となる．以上より

$$\begin{aligned}
V^M_{\mathrm{double}} &= V^M_{\mathrm{double}}\cap p^\sigma(V_{[0]} + \cdots + V_{[k]})\\
&= V^M_{\mathrm{double}}\cap p^\sigma(V_{[0]} + V_{[1]}) + p^\sigma(V_{[2]} + \cdots + V_{[k]})\\
&= \Big(V^M_{\mathrm{double}}\cap p^\sigma\big(V_{[0]}^{M_{ss}(\alpha)}\big)\oplus V^M_{\mathrm{double}}\cap p^\sigma\big(V_{[1]}^{M_{ss}(\alpha)}\big)\Big) + p^\sigma\big(V_{[2]}^{M_{ss}(\alpha)} + \cdots + V_{[k]}^{M_{ss}(\alpha)}\big). \quad\square
\end{aligned}$$

次は定理 1.4 の第 2 の主張の必要性を示す：

命題 4.7. $V^M_{\mathrm{double}}\neq 0$ とすると，$v\in V^M_{\mathrm{double}}$，$w\in W$ および $\Psi\in\mathrm{Hom}_K(V, U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}))$ で (4.5) を満たさないものが存在する．

証明. 仮定より上の考察における $V_{[2]}+\cdots+V_{[k]}$ が 0 でないような $\alpha\in\Pi$ が存在する. $V_{[s]}\neq 0$ となる s $(2\leq s\leq k)$ と $V_{[s]}$ の $K_{ss}(\alpha)$-既約部分加群 V_0, $V_0^{M_{ss}(\alpha)}$ の 0 でないベクトル v_0 を適当に選んで固定する.

まず $p^\sigma(v_0)\neq 0$ を示す. $K_{ss}(\alpha)$-加群の既約分解 $U(\mathfrak{k}_{ss}(\alpha))V^M=V^{(1)}\oplus V^{(2)}\oplus\cdots$ を, 各成分が $(\cdot,\cdot)_V$ に関して互いに直交し, かつ $V^{(1)}=V_0$ となるように行う. 任意の $v\in V^M$ はこの既約分解に応じて $v=v^{(1)}+v^{(2)}+\cdots$ と一意的に分解され, 各 $v^{(s)}$ $(s=1,2,\ldots)$ は $M_{ss}(\alpha)$ で固定されるベクトルである. $U(\mathfrak{k}_{ss}(\alpha)_{\mathbb{C}})V^M$ は V^M で生成されるので, 少なくとも 1 つの $v\in V^M$ について $v^{(1)}\neq 0$ であるが, $\dim_{\mathbb{C}}V_0^{M_{ss}(\alpha)}=1$ より 0 でない定数 c があって $v^{(1)}=cv_0$ とできる. $(\cdot,\cdot)_V$ を V 上の K-不変 Hermite 内積とすると $(v,p^\sigma(v_0))_V=(v,v_0)_V=(v^{(1)},v_0)_V=c(v_0,v_0)_V\neq 0$ より $p^\sigma(v_0)\neq 0$ を得る.

次に同次な $\varphi\in\mathrm{Hom}_W(V^M,S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}))$ を $\varphi[p^\sigma(v_0)]\neq 0$ となるように取る. 命題 3.1, (2.1), (3.15), Γ_0^σ が同次性を保つことより, 0 でない同次元 $a\in\mathscr{A}$ が存在して $a\cdot\mathrm{Hom}_W(V^M,S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}))\subset\Gamma_0^\sigma(\mathrm{Hom}_K(V,S(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}})))$. そこで $\Phi\in\mathrm{Hom}_K(V,S(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}))$ を $\Gamma_0^\sigma(\Phi)=a\cdot\varphi$ となるように取り, $\Psi=\mathrm{symm}\circ\Phi\in\mathrm{Hom}_K(V,U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))$ と置く. Φ は同次であり $\gamma_0(\Phi[v_0])=a\cdot\varphi[p^\sigma(v_0)]\neq 0$ であるから (4.3) より $\gamma(\Psi[v_0])\neq 0$.

γ_α, S_α, $\mathscr{H}_\alpha$ は定理 4.5 の証明と同じものとする. $\Psi^0\in\mathrm{Hom}_{K_{ss}(\alpha)}(V_0,\mathrm{symm}(\mathscr{H}_\alpha))\setminus\{0\}$ を任意に取って固定し, $\mathrm{Hom}_{K_{ss}(\alpha)}(V_0,U(\mathfrak{a}(\alpha)_{\mathbb{C}}+\mathfrak{g}_{ss}(\alpha)_{\mathbb{C}}))$ の要素 Ψ_0 を

$$V_0\hookrightarrow V\xrightarrow{\Psi}U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\xrightarrow{\gamma_\alpha}U(\mathfrak{a}(\alpha)_{\mathbb{C}}+\mathfrak{g}_{ss}(\alpha)_{\mathbb{C}})$$

により定めると, 定理 4.5 の証明と同様に, 適当に $f_1,\ldots,f_j\in S(\mathfrak{a}(\alpha)_{\mathbb{C}})$ および $D_1,\ldots,D_j\in S_\alpha$ を選んで $\Psi_0-\Psi^0(D_1f_1+\cdots+D_jf_j)\in\mathrm{Hom}_{K_{ss}(\alpha)}(V_0,U(\mathfrak{a}(\alpha)_{\mathbb{C}}+\mathfrak{g}_{ss}(\alpha)_{\mathbb{C}})\mathfrak{k}_{ss}(\alpha)_{\mathbb{C}})$ とできる. このとき

$$\gamma(\Psi[v_0])=\gamma(\Psi_0[v_0])=\gamma\left(\Psi^0[v_0]\right)\cdot(\gamma(D_1)f_1+\cdots+\gamma(D_j)f_j),$$
$$\gamma(D_1)f_1+\cdots+\gamma(D_j)f_j\in S(\mathfrak{a}(\alpha)_{\mathbb{C}})\cdot\mathbb{C}[(\alpha^\vee)^2]$$

であるが, 補題 2.6 (iv) より, $2i+j=s\geq 2$ を満たす非負整数 i,j が定まって $\gamma\left(\Psi^0[v_0]\right)$ はスカラー倍を除いて

$$(4.7)\qquad [(h+\delta)(h+\delta+2)\cdots(h+\delta+2(i+j)-2)]\cdot[(h+1)(h+3)\cdots(h+2i-1)]$$

に一致する (但し $h=\frac{\alpha^\vee}{2}+\frac{\dim\mathfrak{g}_\alpha}{2}\in S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$, $\delta=\dim\mathfrak{g}_{2\alpha}$). 明らかに $\gamma\left(\Psi^0[v_0]\right),\frac{1}{(h+\delta)}\gamma\left(\Psi^0[v_0]\right)\notin\mathbb{C}[(\alpha^\vee)^2]$ であるから,

$$\gamma(\Psi[v_0])=\Gamma^\sigma(\Psi)[p^\sigma(v_0)]\notin S(\mathfrak{a}(\alpha)_{\mathbb{C}})\cdot\mathbb{C}[(\alpha^\vee)^2]\cup S(\mathfrak{a}(\alpha)_{\mathbb{C}})\cdot\mathbb{C}[(\alpha^\vee)^2](\alpha^\vee+\dim\mathfrak{g}_\alpha+2\dim\mathfrak{g}_{2\alpha}).$$

従って補題 4.3 より $s_\alpha\Gamma^\sigma(\Psi)[p^\sigma(v_0)]\neq\pm\Gamma^\sigma(\Psi)[p^\sigma(v_0)]$. 一方 $v_0\in V_0^{M_{ss}(\alpha)}$, $\dim_{\mathbb{C}}V_0^{M_{ss}(\alpha)}=1$ であるので $s_\alpha v_0=\pm v_0$, 従って $s_\alpha p^\sigma(v_0)=\pm p^\sigma(v_0)$ である. □

注意 4.8. 上の証明で $s_\alpha p^\sigma(v_0)=(-1)^sp^\sigma(v_0)$ がいえる. 実際, $\Phi^0\in\mathrm{Hom}_{K_{ss}(\alpha)}(V_0,\mathscr{H}_\alpha)$ を $\Psi^0=\mathrm{symm}\circ\Phi^0$ であるものとすると, これは同次元である. よって (4.3) と (4.7) より 0 でない定数 C があって $\gamma_0\left(\Phi^0[v_0]\right)=C\left(\frac{\alpha^\vee}{2}\right)^s$ となる.

$$\gamma_0\left(\Phi^0[s_\alpha v_0]\right)=s_\alpha\gamma_0\left(\Phi^0[v_0]\right)=s_\alpha C\left(\frac{\alpha^\vee}{2}\right)^s=(-1)^sC\left(\frac{\alpha^\vee}{2}\right)^s=\gamma_0\left(\Phi^0[(-1)^sv_0]\right)$$

であるので $s_\alpha v_0=(-1)^sv_0$.

この節の残りでは定理 3.5 の非可換版である次の定理を証明する:

定理 4.9. 任意の $\psi\in\mathrm{Hom}_W(V^M/V^M_{\mathrm{double}},S_{\mathrm{H}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}))$ に対して $\Gamma^\sigma(\Psi)=\psi$ となる $\Psi\in\mathrm{Hom}_K(V,U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))$ が存在する.

$V' \subset V^M$ を任意の W-部分加群とする．$\iota^{\#}_{V'}$ で写像

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^M, S_{\mathbf{H}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})) \ni \psi \mapsto \psi|_{V'} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V', S_{\mathbf{H}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}))$$

や

$$\mathrm{Hom}_W(V^M, S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})) \ni \varphi \mapsto \varphi|_{V'} \in \mathrm{Hom}_W(V', S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}))$$

等を表す．$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V', S_{\mathbf{H}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}))$ には $S_{\mathbf{H}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}) \simeq S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ のフィルター付けから来る自然なフィルター付けがあるが，それに関して自然な写像

$$q_d : \{\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V', S_{\mathbf{H}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}));\ \deg\psi \le d\} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V', \sum_{i=0}^{d} S^i(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V', S^d(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}))$$

を定める（$d = 0, 1, \ldots$）．

補題 4.10. 任意の $\Psi \in \mathrm{Hom}_K(V, U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))$ について $\iota^{\#}_{V^M_{\mathrm{single}}} \circ \Gamma^{\pi}(\Psi) \in \mathrm{Hom}_W(V^M_{\mathrm{single}}, S_{\mathbf{H}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}))$．また，任意の $\psi \in \mathrm{Hom}_W(V^M_{\mathrm{single}}, S_{\mathbf{H}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}))$（$d = \deg\psi$）について $q_d(\psi) \in \mathrm{Hom}_W(V^M_{\mathrm{single}}, S^d(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}))$．

証明. 定理 4.5 より前半は明らか．後半は自然な写像

$$\{f \in S_{\mathbf{H}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}});\ \deg f \le d\} = \sum_{i=0}^{d} S^i(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}) \longrightarrow S^d(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$$

が W-準同型であることを示せばよいが，それは (4.1) と (1.9) から容易に導かれる． □

補題 4.11. 任意の $\Psi \in \mathrm{Hom}_K(V, U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))$ について $\psi := \iota^{\#}_{V^M_{\mathrm{double}}} \circ \Gamma^{\pi}(\Psi) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^M_{\mathrm{double}}, S_{\mathbf{H}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}))$，$d = \deg\psi$ と置くと $q_d(\psi) \in \mathrm{Hom}_W(V^M_{\mathrm{double}}, S^d(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}))$．

証明. 任意に $\alpha \in \Pi$ を取り，各 $v \in V^M_{\mathrm{double}}$ に対して

$$q_d(\psi)[s_\alpha v] = s_\alpha q_d(\psi)[v] \tag{4.8}$$

の成立を確かめるために (4.6) の分解を考える．

任意に $K_{\mathrm{ss}}(\alpha)$-既約部分加群 $V_0 \subset V_{[s]}$（$s = 2, 3, \ldots$）および $v_0 \in V_0^{M_{\mathrm{ss}}(\alpha)}$ を取ると，定理 4.5 や命題 4.7 と同様に，$2i + j = s$ を満たす非負整数 i, j と $D_0 \in S(\mathfrak{a}(\alpha)_{\mathbb{C}}) \cdot \mathbb{C}[(\alpha^\vee)^2]$ が存在して

$$\Gamma^{\sigma}(\Psi)[p^{\sigma}(v_0)] = D_0 \cdot [(h+\delta)(h+\delta+2)\cdots(h+\delta+2(i+j)-2)] \cdot [(h+1)(h+3)\cdots(h+2i-1)]$$

となることが分かる（但し $h = \frac{\alpha^\vee}{2} + \frac{\dim\mathfrak{g}_\alpha}{2} \in S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$，$\delta = \dim\mathfrak{g}_{2\alpha}$）．故に $S(\mathfrak{a}(\alpha)_{\mathbb{C}}) \cdot \mathbb{C}[(\alpha^\vee)^2]$ の同次元 $\bar{D}_0$ が存在して

$$q_d(\psi)[p^{\sigma}(v_0)] = \bar{D}_0 \left(\frac{\alpha^\vee}{2}\right)^s$$

となり，$s_\alpha q_d(\psi)[p^{\sigma}(v_0)] = (-1)^s q_d(\psi)[p^{\sigma}(v_0)]$ が成り立つ．一方注意 4.8 により $s_\alpha p^{\sigma}(v_0) = (-1)^s p^{\sigma}(v_0)$ であるので，$v = v_0$ に対して (4.8) が確かめられた．

次に $K_{\mathrm{ss}}(\alpha)$-加群 $V_{[1]}$ を既約分解して $V^{(1)} \oplus \cdots \oplus V^{(t)}$ とする．$p^{\sigma}(v_{[1]}) \in V^M_{\mathrm{double}}$ であるような任意の $v_{[1]} \in V_{[1]}^{M_{\mathrm{ss}}(\alpha)}$ をこの分解に則して分解して $v_{[1]} = v^{(1)} + \cdots + v^{(t)}$ とすると $v^{(s)} \in \left(V^{(s)}\right)^{M_{\mathrm{ss}}(\alpha)}$ であるから（$s = 1, \ldots, t$），定理 4.5 の証明と同様に $D_1, \ldots, D_t \in S(\mathfrak{a}(\alpha)_{\mathbb{C}}) \cdot \mathbb{C}[(\alpha^\vee)^2]$ が存在して

$$\Gamma^{\pi}(\Psi)[p^{\sigma}(v^{(s)})] = D_s(\alpha^\vee + \dim\mathfrak{g}_\alpha + 2\dim\mathfrak{g}_{2\alpha}) \qquad s = 1, \ldots, t$$

とできる．故に $S(\mathfrak{a}(\alpha)_{\mathbb{C}}) \cdot \mathbb{C}[(\alpha^\vee)^2]$ の同次元 $\bar{D}$ が存在して

$$q_d(\psi)[p^{\sigma}(v_{[1]})] = \bar{D}\alpha^\vee$$

となる．$s_\alpha p^\sigma(\nu_{[1]}) = -p^\sigma(\nu_{[1]})$，$s_\alpha \bar{D}\alpha^\vee = -\bar{D}\alpha^\vee$ であるから $\nu = p^\sigma(\nu_{[1]})$ に対して (4.8) が確かめられた．
全く同様に任意の $\nu \in V^M_{\mathrm{double}} \cap p^\sigma\left(V^{M_{ss}(\alpha)}_{[0]}\right)$ に対して (4.8) が確かめられるので，(4.6) により補題が成立する． □

補題 4.12. 任意の $\psi \in \mathrm{Hom}_W(V^M_{\mathrm{single}}, S_{\mathbf{H}}(\mathfrak{a}_{\mathbf{C}})) \setminus \{0\}$ に対して

$$\iota^\#_{V^M_{\mathrm{single}}} \circ \Gamma^\sigma(\Psi) = \psi, \qquad \deg \iota^\#_{V^M_{\mathrm{double}}} \circ \Gamma^\sigma(\Psi) < \deg \psi$$

を満たす $\Psi \in \mathrm{Hom}_K(V, U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}))$ が存在する．

証明. $d = \deg \psi$ とする．$i = d+1, d, d-1, \ldots$ に対して $\Psi_i \in \mathrm{Hom}_K(V, U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}))$ で

$$\deg\left(\psi - \iota^\#_{V^M_{\mathrm{single}}} \circ \Gamma^\sigma(\Psi_i)\right) < i, \qquad \deg \iota^\#_{V^M_{\mathrm{double}}} \circ \Gamma^\sigma(\Psi_i) < d$$

となるものが取れているとする．補題 4.10 により $\varphi_{i-1} := q_{i-1}\left(\psi - \iota^\#_{V^M_{\mathrm{single}}} \circ \Gamma^\sigma(\Psi_i)\right) \in \mathrm{Hom}_W(V^M_{\mathrm{single}}, S^{i-1}(\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}))$ である．$\varphi_{i-1} \in \mathrm{Hom}_W(V^M/V^M_{\mathrm{double}}, S^{i-1}(\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}))$ と見做すと，定理 3.5 より $\Gamma^\sigma_0(\Phi_{i-1}) = \varphi_{i-1}$ となる $\Phi_{i-1} \in \mathrm{Hom}_K(V, S^{i-1}(\mathfrak{p}_{\mathbf{C}}))$ が唯一存在するので，$\Psi_{i-1} = \Psi_i + \mathrm{symm} \circ \Phi_{i-1}$ と置く．$\deg \mathrm{symm} \circ \Phi_{i-1} \le i-1$ であり，(4.3) より

$$q_{i-1} \circ \iota^\#_{V^M_{\mathrm{single}}} \circ \Gamma^\sigma(\mathrm{symm} \circ \Phi_{i-1}) = \iota^\#_{V^M_{\mathrm{single}}}(\varphi_{i-1}) = q_{i-1}\left(\psi - \iota^\#_{V^M_{\mathrm{single}}} \circ \Gamma^\sigma(\Psi_i)\right),$$
$$q_{i-1} \circ \iota^\#_{V^M_{\mathrm{double}}} \circ \Gamma^\sigma(\mathrm{symm} \circ \Phi_{i-1}) = \iota^\#_{V^M_{\mathrm{double}}}(\varphi_{i-1}) = 0$$

であるから，$\deg\left(\psi - \iota^\#_{V^M_{\mathrm{single}}} \circ \Gamma^\sigma(\Psi_{i-1})\right) < i-1$, $\deg \iota^\#_{V^M_{\mathrm{double}}} \circ \Gamma^\sigma(\mathrm{symm} \circ \Phi_{i-1}) < i-1$ である．故に $\Psi_{d+1} := 0$ から始めて帰納的に $\Psi_d, \Psi_{d-1}, \ldots$ を定めて行き，$\Psi := \Psi_0$ とすればよい． □

定理 4.9 の証明. $m = \dim_{\mathbf{C}} V^M$, $m' = \dim_{\mathbf{C}} V^M_{\mathrm{single}}$ と置く．$\mathrm{Hom}_W(V^M/V^M_{\mathrm{single}}, \mathscr{H}_W(\mathfrak{a}))$ の基 $\{\varphi_{m'+1}, \ldots, \varphi_m\}$ を φ_i が d_i 次同次元となるように取る（$\mathscr{H}_W(\mathfrak{a}) \simeq \mathbb{C}[W]$ に注意）．0 でない同次元 $b \in \mathscr{A}$ が存在して $b \cdot \mathrm{Hom}_W(V^M, S(\mathfrak{a}_{\mathbf{C}})) \subset \Gamma^\sigma_0(\mathrm{Hom}_K(V, S(\mathfrak{p}_{\mathbf{C}})))$ となるので（命題 4.7 の証明参照），$\Phi_{m'+1}, \ldots, \Phi_m \in \mathrm{Hom}_K(V, S(\mathfrak{p}_{\mathbf{C}}))$ を $\Gamma^\sigma(\Phi_i) = b \cdot \varphi_i$ となるように取る．$\deg b = d_0$ と置くと (4.3)，補題 4.10，補題 4.12 により $\mathrm{symm} \circ \Phi_{m'+1}, \ldots, \mathrm{symm} \circ \Phi_m$ の低次の部分を修正した $\Psi_{m'+1}, \ldots, \Psi_m \in \mathrm{Hom}_K(V, U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}))$ を各 $i = m'+1, \ldots, m$ について

$$\text{(4.9)} \qquad \deg \Psi_i = \deg \Phi_i = d_i + d_0, \quad q_{d_i+d_0} \circ \iota^\#_{V^M_{\mathrm{double}}} \circ \Gamma^\sigma(\Psi_i) = b \cdot \iota^\#_{V^M_{\mathrm{double}}}(\varphi_i), \quad \iota^\#_{V^M_{\mathrm{single}}} \circ \Gamma^\sigma(\Psi_i) = 0$$

となるように取ることができる．$\mathscr{M} = \iota^\#_{V^M_{\mathrm{double}}} \circ \Gamma^\sigma(\mathrm{Hom}_K(V, U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})))$ と置くと，(1.13) によりこれはフィルター付き $\mathscr{A}$-加群 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V^M_{\mathrm{double}}, S_{\mathbf{H}}(\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}))$ の部分加群となる．補題 4.11 より $\mathrm{gr}\,\mathscr{M} \subset \mathrm{Hom}_W(V^M_{\mathrm{double}}, S(\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}))$ である．$\mathrm{gr}\,\mathscr{M}$ は $\mathscr{A}$ 上有限生成である．$\tilde{\Psi}_1, \ldots, \tilde{\Psi}_k \in \mathrm{Hom}_K(V, U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}))$ を $\{q_{\tilde{d}_i} \circ \iota^\#_{V^M_{\mathrm{double}}} \circ \Gamma^\sigma(\tilde{\Psi}_i);\ i = 1, \ldots k\}$ が $\mathrm{gr}\,\mathscr{M}$ の $\mathscr{A}$ 上の生成元となるように取る（$\tilde{d}_i = \deg \iota^\#_{V^M_{\mathrm{double}}} \circ \Gamma^\sigma(\tilde{\Psi}_i)$ とする）．任意の $a \in \mathscr{A} = S(\mathfrak{p}_{\mathbf{C}})^K$ に対して $\hat{a} := \mathrm{symm}(a) \in U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})^K$ と定める．すると，$d = \deg \iota^\#_{V^M_{\mathrm{double}}} \circ \Gamma^\sigma(\Psi)$ であるような任意の $\Psi \in \mathrm{Hom}_K(V, U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}))$ に対して $\deg a_i \le d - \tilde{d}_i$ なる $a_1, \ldots, a_k \in \mathscr{A}$ で $\iota^\#_{V^M_{\mathrm{double}}} \circ \Gamma^\sigma(\Psi - \tilde{\Psi}_1 \hat{a}_1 - \cdots - \tilde{\Psi}_k \hat{a}_k) = 0$ となるものが存在する．ところで $\{\iota^\#_{V^M_{\mathrm{double}}}(\varphi_i);\ i = m'+1, \ldots, m\}$ は $\mathrm{Hom}_W(V^M_{\mathrm{double}}, S(\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}))$ の $\mathscr{A}$ 上の基となっているので，0 でない同次元 $c_i \in \mathscr{A}$ $(i = 1, \ldots, k)$ および同次元 $b_{is} \in \mathscr{A}$ $(i = 1, \ldots, k,\ s = m'+1, \ldots, m)$ を

$$c_i \cdot q_{\tilde{d}_i} \circ \iota^\#_{V^M_{\mathrm{double}}} \circ \Gamma^\sigma(\tilde{\Psi}_i) = \sum_{s=m'+1}^{m} b_{is}\, b \cdot \iota^\#_{V^M_{\mathrm{double}}}(\varphi_s), \qquad \deg c_i + \tilde{d}_i = \deg b_{is} + d_0 + d_s$$

となるように取れる．$\tilde{\tilde{\Psi}}_i := \tilde{\Psi}_i \hat{c}_i - \sum_{s=m'+1}^{m} \Psi_s \hat{b}_{is}$ と置くと $\deg \iota^{\#}_{V^M_{\text{double}}} \circ \Gamma^\sigma(\tilde{\tilde{\Psi}}_i) < \deg c_i + \tilde{d}_i$ であるので，$\deg a_{ij} < \deg c_i + \tilde{d}_i - \tilde{d}_j$ なる $a_{ij} \in \mathscr{A}$ $(i, j = 1, \ldots, k)$ で

$$\iota^{\#}_{V^M_{\text{double}}} \circ \Gamma^\sigma\left(\tilde{\tilde{\Psi}}_i - \sum_{j=1}^{k} \tilde{\Psi}_j \hat{a}_{ij}\right) = 0$$

を満たすものがある．$\mathrm{symm}(S(\mathfrak{p}_{\mathbf{C}})^K) \subset U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})^K$ を成分とする k 次正方行列 $A := \mathrm{diag}(\hat{c}_1, \ldots, \hat{c}_k) - (\hat{a}_{ij})$ を定めると次数に関する考察により $\gamma(\det A) \neq 0$ となる．また，A の余因子行列を $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$ とすると

$$\iota^{\#}_{V^M_{\text{double}}} \circ \Gamma^\sigma\left(\tilde{\Psi}_i \cdot \det A - \sum_{j=1}^{k} \sum_{s=m'+1}^{m} \Psi_s \tilde{a}_{ij} \hat{b}_{js}\right) = 0 \qquad i = 1, \ldots, k \tag{4.10}$$

を得る．

ここで，$\psi \in \mathrm{Hom}_W(V^M/V^M_{\text{double}}, S_{\mathbf{H}}(\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}))$ を任意に取る．補題 4.12 より $\Psi \in \mathrm{Hom}_K(V, U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}))$ で $\iota^{\#}_{V^M_{\text{single}}} \circ \Gamma^\sigma(\Psi) = \iota^{\#}_{V^M_{\text{single}}}(\psi)$ であるものが取れる．一方 $a_1, \ldots, a_k \in \mathscr{A}$ を $\iota^{\#}_{V^M_{\text{double}}} \circ \Gamma^\sigma(\Psi - \tilde{\Psi}_1 \hat{a}_1 - \cdots - \tilde{\Psi}_k \hat{a}_k) = 0$ となるように取れる．そこで

$$\Psi' = \Psi \cdot \det A - \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \sum_{s=m'+1}^{m} \Psi_s \hat{a}_i \tilde{a}_{ij} \hat{b}_{js}$$

と置くと，(4.9) と (4.10) より $\iota^{\#}_{V^M_{\text{single}}} \circ \Gamma^\sigma(\Psi') = \gamma(\det A) \cdot \iota^{\#}_{V^M_{\text{single}}}(\psi)$，$\iota^{\#}_{V^M_{\text{double}}} \circ \Gamma^\sigma(\Psi') = 0$，即ち $\Gamma^\sigma(\Psi') = \gamma(\det A) \cdot \psi$ となる．従って $\mathscr{I} = \{c \in \mathscr{A}; c \cdot \psi \in \Gamma^\sigma(\mathrm{Hom}_K(V, U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})))\}$ と置くと，これは $\mathscr{A}$ の 0 でないイデアルである．

$\mathscr{I} = \mathscr{A}$ をいえば定理の証明は完結する．$\mathscr{I} \subsetneq \mathscr{A}$ とすると，$\mathscr{I}$ の 0 以外の最小次数の元 c は定数でない．

$$\Gamma^\sigma(\Psi'') = c \cdot \psi$$

となる $\Psi'' \in \mathrm{Hom}_K(V, U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}))$ を取る．$\mathrm{Hom}_K(V, \mathrm{symm}(\mathscr{H}_K(\mathfrak{p})))$ の基 $\{\bar{\Psi}_1, \ldots, \bar{\Psi}_m\}$ および V^M の基 $\{v_1, \ldots, v_m\}$ を取って §2 の行列 $P^\sigma = (\gamma \circ \bar{\Psi}_j[v_i])$ を定める．系 2.2 と (4.4) の完全性により $e_1, \ldots, e_m \in \mathscr{A}$ を $\Psi'' - \bar{\Psi}_1 \hat{e}_1 - \cdots - \bar{\Psi}_m \hat{e}_m \in \mathrm{Hom}_K(V, U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})\mathfrak{k}_{\mathbf{C}})$ となるように取れる．このとき $\Gamma^\sigma(\bar{\Psi}_1)\gamma(\hat{e}_1) + \cdots + \Gamma^\sigma(\bar{\Psi}_m)\gamma(\hat{e}_m) = c \cdot \psi$ であるが，これは P^σ を使って

$$P^\sigma \begin{pmatrix} \gamma(\hat{e}_1) \\ \vdots \\ \gamma(\hat{e}_m) \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \psi[v_1] \\ \vdots \\ \psi[v_m] \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

と書くことができる．

$\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbf{C}}$ が $c(\lambda) = 0$ を満たすとき常に $\gamma(\hat{e}_1)(\lambda) = \cdots = \gamma(\hat{e}_m)(\lambda) = 0$ であることを示す．$w \in W$ を $\mathrm{Re}\langle w\lambda, \alpha \rangle \geq 0$ $(\forall \alpha \in \Sigma^+)$ となるように取る．$c \in \mathscr{A} = S(\mathfrak{a}_{\mathbf{C}})^W$ であるので $c(\lambda) = 0$ のとき $c(w\lambda) = 0$．ここで (4.11) の両辺の $w\lambda$ での値を見ると

$$P^\sigma(w\lambda) \begin{pmatrix} \gamma(\hat{e}_1)(w\lambda) \\ \vdots \\ \gamma(\hat{e}_m)(w\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

である．命題 2.3 により $P^\sigma(w\lambda)$ は正則なので $\gamma(\hat{e}_1)(w\lambda) = \cdots = \gamma(\hat{e}_m)(w\lambda) = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ であるが，$\gamma(\hat{e}_1), \ldots, \gamma(\hat{e}_m) \in \mathscr{A} = S(\mathfrak{a}_{\mathbf{C}})^W$ であるから $\gamma(\hat{e}_1)(\lambda) = \cdots = \gamma(\hat{e}_m)(\lambda) = 0$ がいえた．$\mathscr{A}$ は多項式環と同型で（[He2, Theorem 3.1]），その全ての極大イデアルはある $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbf{C}}$ により $\{f \in \mathscr{A}; f(\lambda) = 0\}$ で与えられ

る（[ibid., Lemma 3.11]）．従って上の事実は c の任意の既約因子 c_0 が全ての $\gamma(\hat{e}_1)$ を割り切ることを示す．$c', e'_1, \ldots, e'_m \in \mathscr{A}$ を $c = c'c_0$，$\gamma(\hat{e}_i) = \gamma(\hat{e}'_i)\,c_0$ である元とし，$\Psi''' = \bar{\Psi}_1\hat{e}'_1 + \cdots + \bar{\Psi}_m\hat{e}'_m$ と置くと

$$\Gamma^{\sigma}(\Psi''') = c' \cdot \psi, \qquad \deg c' < \deg c$$

となる．これは c の次数の最小性に反する．故に $\mathscr{I} = \mathscr{A}$． □

参考文献

[Br] A. Broer, *The sum of generalized exponents and Chevalley's restriction theorem for modules of covariants*, Indag. Math. New Ser. **6**(1995), no.4, 385–396.

[Ch] I. Cherednik, *A unification of Knizhnik-Zamolodchikov equations and Dunkl operators via affine Hecke algebras*, Invent. Math. **106**(1991), 411–432.

[Da] J. Dadok, *On the C^∞ Chevalley theorem*, Adv. in Math. **44**(1982), 121–131.

[Du1] C. F. Dunkl, *Differential-difference operators associated to reflection groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **311**(1989), 167–183.

[Du2] ——, *Hankel transforms associated to finite groups*, In: Proc. of the special session on hypergeometric functions on domains of positivity, Jack polynomials and applications. Proceedings, Tampa 1991, Contemp. Math. **138**(1992), pp.123–138.

[HC] Harish-Chandra, *Spherical functions on a semisimple Lie group, I*, Amer. J. Math. **80**(1958), 241–310.

[He1] S. Helgason, *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press, 1962.

[He2] ——, *Groups and Geometric Analysis*, American Mathematical Society, 2000, c1984.

[Jo] K. D. Johnson, *Generalized Hua operators and parabolic subgroups*, Ann. of Math. **120**(1984), Springer, 477–495.

[Ko1] ——, *On the existence and irreducibility of certain series of representations*, Bull. A. M. S. **75**(1969), 627-642.

[Ko2] ——, *On the existence and irreducibility of certain series of representations*, In: Lie groups an their representations, Summer School Conference, Budapest, 1971, Halsted press, New York (1975), 231-329.

[KR] B. Kostant and S. Rallis, *Orbits and representations associated with symmetric spaces*, Amer. J. Math. **93**(1971), 753–809.

[Lu] G. Lusztig, *Cuspidal local systems and graded Hecke algebras, I*, Publ. Math. de IHES **67**, 1988, 145–202.

[Od] H. Oda, *Genralization of Harish-Chandra isomorphism*, RIMS Kôkyûroku, Kyoto Univ. **1294**(2002), 141–151, in Japanese.

[Op] E. Opdam, *Harmonic analysis for certain representations of graded Hecke algebras*, Acta Math. **175**(1995), no.1, 75–121.

[PRV] K. R. Parthasarathy, R. Ranga Rao and V. S. Varadarajan, *Representations of complex semisimple Lie groups and Lie algebras*, Ann. of Math. **85**(1967), 383–429